TEOREMAS DEL VALOR MEDIO

1. ¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x)=x^2-5x+6$ en $[0,5]$?

Solución:

El teorema de Rolle dice que:

Para una función f que es continua en $[a,b]$, *derivable en* (a,b) *y además cumple que* $f(a)=f(b)$, *entonces existe como mínimo un* $c\in(a,b)$ *tal que* $f'(c)=0$

Veamos si nuestra función cumple todas estas condiciones:

- **Estudiamos la continuidad** en $[0,5]$:

  Es inmediato que f es continua en todo $\mathbb{R}$, ya que se trata de un polinomio. Así que f es continua en $[0,5]$

- **Estudiamos la derivabilidad** en $(0,5)$:

  Es inmediato que f es derivable en todo $\mathbb{R}$, ya que se trata de un polinomio. Así que f es derivable en $(0,5)$

- **Estudiamos si se cumple** $f(a)=f(b)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^2-5\cdot 0+6=6 \\ f(5)=5^2-5\cdot 5+6=6 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=f(5)$$

Podemos entonces afirmar que se cumple el Teorema de Rolle.

Hallemos el punto c, el cuál está dado por la condición $f'(c)=0$. Tenemos que encontrar, entonces, los valores x que anulan la primera derivada de la función. La derivada de $f(x)=x^2-5x+6$ es $f'(x)=2x-5$.

Así que $f'(x)=0\Rightarrow 2x-5=0\Rightarrow \boxed{x=\frac{5}{2}}$

2. ¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x)=|x-2|$ en $[0,4]$?

Solución:

El teorema de Rolle dice que:

Para una función f que es continua en $[a,b]$, *derivable en* (a,b) *y además cumple que* $f(a)=f(b)$, *entonces existe como mínimo un* $c\in(a,b)$ *tal que* $f'(c)=0$

Lo primero que vamos a hacer es escribir la función dada como sigue, ya que se trata de una función de valor absoluto.

$$f(x)=\begin{cases}-(x-2) & \text{si } x<2\\ x-2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$

Veamos si nuestra función cumple todas estas condiciones:

- **Continuidad** en $[0,4]$:

  La continuidad de f sólo puede fallar en el punto 2. La función será continua en 2 si los límites laterales son iguales y su valor coincide con el valor de $f(2)$:

  - $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left[-(x-2)\right]=0$
  - $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$
  - $f(2)=2-2=0$

  Vemos que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=0$, luego la función es continua en 2.

- **Derivabilidad** en $(0,4)$:

  La derivabilidad de f sólo puede fallar en el punto 2. Para probar que es derivable en 2 hay que ver si se cumple que $f'(2^-)=f'(2^+)$:

  - $f'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-(x-2)-(2-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=-1$

- $f'\left(2^{+}\right)=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{(x-2)-(2-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{x-2}{x-2}=1$

$f'\left(2^{-}\right)\neq f'\left(2^{+}\right)\Rightarrow$ No es derivable en 2.

Conclusión:

No se cumplen todos los requisitos del Teorema de Rolle. No existirá ningún $c\in(0,4)$ que verifique $f'(c)=0$.

3. Halla a, b y c para que $f(x)=\begin{cases}x^2+ax & \text{si} \quad x\leq 3\\ bx+c & \text{si} \quad x>3\end{cases}$ cumpla el Teorema de Rolle en $[-1,7]$

Solución:

El teorema de Rolle dice que:

Para una función f que es continua en $[a,b]$, *derivable en* (a,b) *y además cumple que* $f(a)=f(b)$, *entonces existe como mínimo un* $c\in(a,b)$ *tal que* $f'(c)=0$

Veamos si nuestra función cumple todas estas condiciones:

- **Continuidad** en $[-1,7]$:

La continuidad de f sólo puede fallar en el punto 3. La función será continua en 3 si los límites laterales son iguales y su valor coincide con el valor de $f(3)$:

- $\lim_{x\to 3^{-}}f(x)=\lim_{x\to 3^{-}}\left(x^2+ax\right)=9+3a$
- $\lim_{x\to 3^{+}}f(x)=\lim_{x\to 3^{+}}(bx+c)=3b+c$
- $f(3)=9+3a$

Se tiene que cumplir entonces que: $\lim_{x\to 3^{-}}f(x)=\lim_{x\to 3^{+}}f(x)=f(3)$, es decir: $9+3a=3b+c$

- **Derivabilidad** en $(-1,7)$:

La derivabilidad de f sólo puede fallar en el punto 3. Para probar que es derivable en 3 hay que ver si se cumple que $f'(3^-) = f'(3^+)$:

- $f'(3^-) = \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+ax-9-3a}{x-3} =$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9+a(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-3^2}{x-3} + \lim_{x\to 3^-} \frac{a(x-3)}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} + \lim_{x\to 3^-} \frac{a\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = 9+a$$

- $f'(3^+) = \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{bx+c-(3b+c)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{bx-3b}{x-3} =$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{b\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = b$$

Se tiene que cumplir entonces que $a = b$

A modo de concreción, vamos a reunir todas las condiciones que se han de dar para la continuidad y derivabilidad, que no son más que las definidas por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a = b \\ 9+3a = 3b+c \end{array}\right\} \Rightarrow 9+3a = 3a+c \Rightarrow c = 9$$

Nos queda analizar una última condición:

- **La función debe tener el mismo valor en los extremos del intervalo**: $f(-1) = f(7)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^2 + a(-1) = 1-a \\ f(7) = 7b+9 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-a = 7b+9$$

Pero $a = b$, por lo que $1-a = 7b+9 \Rightarrow 1-a = 7a+9 \Rightarrow a = -1$

Conclusión final:

$a=b=-1;\quad c=9$, por lo que la siguiente función cumplirá el Teorema de Rolle:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\leq 3 \\ -x+9 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

4. Verifica que se cumple el Teorema del valor medio para $f(x)=2x^2-7x+10$ en el intervalo $[2,5]$

Solución:

Recordemos el Teorema del valor medio:

Para una función f que es continua en $[a,b]$, *derivable en* (a,b), *entonces*
existe como mínimo un $c\in(a,b)$ *tal que* $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

La función, por tratarse de un polinomio, es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo que debe de existir, como mínimo, un c tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Vamos a buscar el valor de c:

Sustituimos los datos del enunciado en la expresión $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2x^2-7x+10\Rightarrow f'(x)=4x-7 \\ f(b)=f(5)=2\cdot 5^2-7\cdot 5+10=25 \\ f(a)=f(2)=2\cdot 2^2-7\cdot 2+10=4 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(c)=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-7=\frac{21}{3}\Rightarrow \boxed{c=\frac{7}{2}}$$

5. Verifica que se cumple el Teorema del valor medio para $f(x)=x^3+x-1$ en el intervalo $[0,2]$ y encuentra todos los números c que lo satisface.

Solución:

Recordemos el Teorema del valor medio:

Para una función f que es continua en $[a,b]$, *derivable en* (a,b), *entonces*

existe como mínimo un $c\in(a,b)$ *tal que* $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

La función dada es un polinomio, por lo que será continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Ello quiere decir que, como mínimo, habrá un c que cumpla $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Vamos a hallar esos valores c:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+1 \\ f(0)=-1 \\ f(2)=9 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2+1=\frac{9+1}{2-0}\Rightarrow x^2=\frac{4}{3}\Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

De estas dos soluciones, sólo $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ está en $[0,2]$, por lo que $\boxed{c=\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

6. Sea la función $f(x)=5-\dfrac{4}{x}$. Halla todos los valores pertenecientes al intervalo $(1,4)$, que denotaremos por c, que cumplan lo siguiente: $f'(c)=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}$

<u>Solución</u>:

Recordemos el Teorema del valor medio:

Para una función f que es continua en $[a,b]$, *derivable en* (a,b), *entonces*

existe como mínimo un $c\in(a,b)$ *tal que* $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Para hallar c tenemos que encontrar el valor de $f'(c)$ y eso se hace sustituyendo los valores de $f(4)$ y $f(1)$ en la expresión $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}$:

$$\left.\begin{array}{l} f(4)=5-\dfrac{4}{4}=4 \\ f(1)=5-\dfrac{4}{1}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{4-1}{4-1}=1 \Rightarrow f'(c)=1$$

Los valores c que hacen que se cumpla $f'(c)=1$ son:

$$f'(x)=1 \Rightarrow 0-\left(-\frac{4}{x^2}\right)=1 \Rightarrow \frac{4}{x^2}=1 \Rightarrow x=\pm 2$$

Pero en $(1,4)$ sólo está incluido el 2. Así que nuestra solución es: $x=2$

7. Demuestra que $f(x)$ cumple todas los requisitos del teorema del valor medio en $[2,6]$. ¿Para qué puntos se cumple?

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad x<4 \\ -x^2+10x-19 & \text{si} \quad x\geq 4 \end{cases}$$

<u>Solución</u>:

Recordemos el Teorema del valor medio:

Para una función f que es continua en $[a,b]$, *derivable en* (a,b), *entonces*
existe como mínimo un $c\in(a,b)$ *tal que* $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Estudiamos si la función cumple estas condiciones:

- **Continuidad** en $[2,6]$:

  La continuidad de f sólo puede fallar en el punto 4. La función será continua en 4 si los límites laterales son iguales y su valor coincide con el valor de $f(4)$:

  - $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(2x-3)=5$
  - $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\left(-x^2+10x-19\right)=5$
  - $f(4)=5$

Se cumple $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$, por lo que $f(x)$ es continua en $x=4$

- **Derivabilidad** en $(2,6)$:

La derivabilidad de f sólo puede fallar en el punto 4. Para probar que es derivable en 4 hay que ver si se cumple que $f'(4^-) = f'(4^+)$:

- $f'(4^-) = \lim_{x\to 4^-} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4^-} \dfrac{2x-3-(2\cdot 4-3)}{x-4} = \lim_{x\to 4^-} \dfrac{2(x-4)}{x-4} = 2$

- $f'(4^+) = \lim_{x\to 4^+} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \dfrac{-x^2+10x-19-\left(-4^2+10\cdot 4-19\right)}{x-4} =$

$$= \lim_{x\to 4^-} \frac{-(x-6)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = 2$$

Se cumple $f'(4^-) = f'(4^+)$, luego la función es derivable en $x=4$

Lo anterior asegura que existe como mínimo un $c \in (2,6)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(6)-f(2)}{6-2}$. Veamos cual es ese valor.

- Si el posible punto es menor que 4:

  $f'(x) = 2$, lo cual se queda fuera del intervalo $(2,6)$

- Si el posible punto es mayor que 4:

  $f'(x) = -2x+10 = \dfrac{f(6)-f(2)}{6-2} = \dfrac{5-17}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{x=4}$