

SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

A. Introducción teórica

B. Ejercicios resueltos

A. Introducción teórica

En los sistemas de ecuaciones no lineales, a diferencia de los lineales, aparecen ecuaciones en las que hay incógnitas de grado mayor que uno, por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = -1 \\ (x-1)^2 + y = 3 \end{array} \right\}$$

En el caso de sistemas de dos ecuaciones de dos incógnitas, las ecuaciones ya no serán dos líneas rectas. Una de ellas, o las dos, pueden ser parábolas, elipses, hipérbolas. La solución será los puntos en los que las dos ecuaciones se corten.

B. Ejercicios resueltos

$$1. \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 8 \\ x \cdot y = -3 \end{array} \right\}$$

Solución:

Lo primero que vamos a hacer es manipular convenientemente la

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{y} \Rightarrow \left(-\frac{3}{y}\right)^2 - y^2 = 8 \Rightarrow y^4 + 8y^2 - 9 = 0,$$

,en donde ahora hacemos el cambio $t^2 \equiv y$, lo que implica que

$$y^4 + 8y^2 - 9 = 0 \Rightarrow t^2 + 8t - 9 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$t^2 + 8t - 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{-8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 9}}{2a} = \begin{cases} t_1 = -9 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Ahora deshacemos el cambio:

$$\begin{cases} t_1 = -9 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9}, \text{ que no tiene soluciones en } \mathbb{R} \\ t_2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Sólo hay dos posibles valores de x . Hallamos el valor de y para cada x :

$$\text{Si } x=1, \text{ entonces: } y = -\frac{3}{1} = -3$$

$$\text{Si } x=-1, \text{ entonces: } y = -\frac{3}{(-1)} = 3$$

Conclusión:

$$(x, y) = (1, -3)$$

$$(x, y) = (-1, 3)$$

$$2. \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{array} \right\}$$

Solución:

Lo primero que vamos a hacer es manipular convenientemente la ecuación inferior para escribirla en función de $\frac{1}{x^2}$ y llevarla así a la ecuación superior.

Escribimos como sigue la ecuación inferior:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2}$$

Ahora la llevamos a la superior:

$$\left(1 + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{1}{y^2} = 13 \Rightarrow \frac{1}{y^2} + \frac{y}{y^2} = \frac{6y^2}{y^2} \Rightarrow 6y^2 - y - 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$6y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{125}}{12} = \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} \\ y_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ahora obtenemos los valores de x :

Si $y_1 = \frac{1}{2}$, entonces, usando la ecuación inferior:

$$\frac{1}{x} = 1 + 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Si $y_1 = -\frac{1}{3}$, entonces, usando nuevamente la ecuación inferior:

$$\frac{1}{x} = 1 - 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Conclusión:

$$\begin{cases} (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \\ (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \end{cases}$$

Solución:

Vamos a restar las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0 \\ - x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \\ \hline 2x + 2y - 10 = 0 \Rightarrow y = 5 - x \end{array}$$

Cuando tengamos los valores de x , los sustituiremos en ésta ecuación para obtener y .

Ahora llevamos éste resultado a la primera ecuación del sistema. De ahí obtendremos el valor de x :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0 &\Rightarrow x^2 + (5-x)^2 - 4x - 6y + 11 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \end{aligned}$$

Resolvemos esta ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Ahora hallamos los valores de y sustituyendo los de x en $y = 5 - x$

Para $x_1 = 3$ se tiene que $y_1 = 5 - 3 = 2$, mientras que para $x_2 = 1$ se tiene que $y_1 = 5 - 1 = 4$

Conclusión:

$$(x_1, y_1) = (3, 2)$$

$$(x_2, y_2) = (1, 4)$$

$$4. \quad \left. \begin{array}{l} 2x + y^2 - y = 4 \\ y^2 - 3 = x \end{array} \right\}$$

Solución:

La segunda ecuación del sistema, $y^2 - 3 = x$, la llevamos a la primera ecuación:

$$2(y^2 - 3) + y^2 - y = 4.$$

Esto es una ecuación de segundo grado. Pero hay que simplificar para removerla.

$$2(y^2 - 3) + y^2 - y = 4 \Rightarrow 3y^2 - y - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{6} = \frac{1 \pm 11}{6} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Los valores de x los obtendremos sustituyendo $y_1 = 2$ y $y_2 = -\frac{5}{3}$ en la segunda ecuación del sistema, $y^2 - 3 = x$. Así:

Para $y_1 = 2$:

$$y^2 - 3 = x \Rightarrow (2)^2 - 3 = x \Rightarrow x_1 = 1$$

Para $y_2 = -\frac{5}{3}$

$$y^2 - 3 = x \Rightarrow \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 3 = x \Rightarrow x_2 = -\frac{9}{2}$$

Conclusión

$$(x_1, y_1) = (1, 2) \text{ y } (x_2, y_2) = \left(-\frac{9}{2}, -\frac{5}{3}\right)$$

$$5. \begin{cases} 2x^2 - 10y^2 = 8 \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$$

Solución:

Se puede eliminar fácilmente la x del sistema si multiplicamos la segunda ecuación por (-2) y luego sumamos las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 10y^2 = 8 \\ (-2) \cdot (x^2 - 3y^2 = 6) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 2x^2 - 10y^2 = 8 \\ -2x^2 + 6y^2 = -12 \\ \hline -4y^2 = -4 \Rightarrow y = \pm 1 \end{array}$$

Ahora obtendremos los valores de x . Usaremos, por ejemplo, la segunda ecuación del sistema, y en ella introduciremos $y = \pm 1$. Así:

Si $y = 1$ entonces $2x^2 - 10y^2 = 8 \Rightarrow 2x^2 - 10 \cdot 1^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 3$, por lo que dos soluciones son $(3, 1)$ y $(-3, 1)$

Si $y = -1$ entonces $2x^2 - 10y^2 = 8 \Rightarrow 2x^2 - 10 \cdot (-1)^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 3$, por lo que otras dos soluciones son $(3, -1)$ y $(-3, -1)$

Conclusión:

Tenemos cuatro puntos que satisfacen el sistema:

$$(x_1, y_1) = (3, 1); (x_2, y_2) = (-3, 1), (x_3, y_3) = (3, -1) \text{ y } (x_4, y_4) = (-3, -1)$$

$$6. \begin{cases} xy = \frac{x^2}{2} - 2x - 6 \\ y = x^2 - 4x - 12 \end{cases}$$

Solución:

De la primera ecuación despejamos la x y aplicamos el método de igualación:

$$xy = \frac{x^2}{2} - 2x - 6 \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 2 - \frac{6}{x} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \frac{x}{2} - 2 - \frac{6}{x} \\ y = x^2 - 4x - 12 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - 2 - \frac{6}{x} = x^2 - 4x - 12$$

Ahora tratamos de simplificar esa ecuación con el fin de poder resolverla:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - 2 - \frac{6}{x} = x^2 - 4x - 12 &\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 2x^3 - 8x^2 - 24x \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x^3 - 9x^2 - 20x + 12 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-6)(2x-1) = 0 \end{aligned}$$

La obtención de las soluciones de esta ecuación de grado tres es inmediata:

$$(x+2)(x-6)(2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x-6=0 \\ 2x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ahora sustituiremos estos tres valores de x en una de las dos ecuaciones del sistema. Lo haremos en la segunda ecuación, $y = x^2 - 4x - 12$. Así:

Para $x_1 = -2$ se tiene que:

$$y = x^2 - 4x - 12 \Rightarrow y = (-2)^2 - 4(-2) - 12 \Rightarrow y = 0, \text{ es decir, una solución es } (x_1, y_1) = (-2, 0)$$

Para $x_2 = 6$ se tiene que:

$$y = x^2 - 4x - 12 \Rightarrow y = 6^2 - 4 \cdot 6 - 12 \Rightarrow y = 0, \text{ es decir, otra solución es } (x_2, y_2) = (6, 0)$$

Para $x_3 = \frac{1}{2}$ se tiene que:

$$y = x^2 - 4x - 12 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 12 \Rightarrow y = -\frac{55}{4}, \text{ es decir, otra solución es } (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{55}{4}\right)$$
