

EJERCICIOS RESUELTOS DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

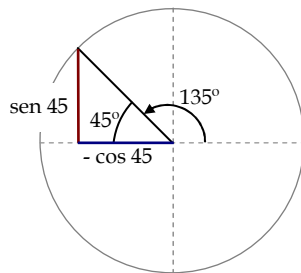
1. Razones trigonométricas

a) Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

- 135°

Solución:

El ángulo 135° está en el 2º cuadrante. Será equivalente a un ángulo de 45° para el que $\text{sen}45$ es positivo y $\text{cos}45$ es negativo, tal como se indica en la figura.



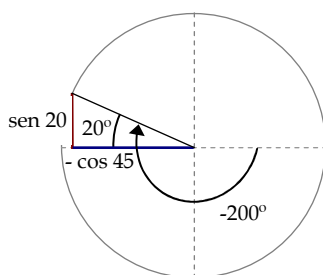
- -560°

Solución:

Como el ángulo es mayor que 360° lo tratamos del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l} 560 \\ 200 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lfloor 360 \\ 1 \end{array} \Rightarrow 1 \text{ vuelta} \cdot 360^\circ + 200^\circ$$

El ángulo que tenemos que manejar es -200° . Ello es equivalente a un ángulo de 20° en el segundo cuadrante, en donde $\text{sen}20$ es positivo y $\text{cos}20$ es negativo



b) Sabiendo que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y que α está en el 4º cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

Solución:

Si α está en el 4º cuadrante entonces $\cos \alpha$ es positivo y $\text{sen} \alpha$ es negativo.

El $\text{sen} \alpha$ lo deducimos usando la relación fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\text{Así: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}$$

El resto de razones trigonométricas se obtiene de forma inmediata:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\sqrt{3};$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = -2$$

c) Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y que α está en el 2º cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

Solución:

Si α está en el 2º cuadrante entonces $\cos \alpha$ es negativo y $\sin \alpha$ es positivo.

- Utilizamos la relación $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ para hallar $\sin \alpha$:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Hallamos $\cos \alpha$ a partir de $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$:

$$\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{3}{2}.$$

- Las obtención de las razones trigonométricas inversas es inmediata:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{2}{3}; \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}}; \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\sqrt{3}$$

d) Si α está en el tercer cuadrante y $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, determina las siguientes razones trigonométricas:

- $\sin(180^\circ - \alpha)$

Solución:

Como α está en el tercer cuadrante el $\sin \alpha$ es negativo, como bien indica el enunciado. Pero, en general, $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$, así que $\sin(180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{2}$

- $\sin(180^\circ + \alpha)$

Solución:

Como α está en el tercer cuadrante el $\sin \alpha$ es negativo. Además:

$$\sin \alpha = -\sin(180 - \alpha), \text{ así que } \sin(180 - \alpha) = \frac{1}{2}$$

- $\cos(180^\circ - \alpha)$

Solución:

Como α está en el tercer cuadrante $\cos \alpha$ es negativo. Además:

$$\cos \alpha = -\cos(180 - \alpha).$$

Deduzcamos $\cos \alpha$:

Usamos la relación fundamental de la trigonometría: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Entonces, } \cos(180 - \alpha) = \frac{3}{4}$$

- $\cos(180^\circ + \alpha)$

Solución:

Se cumple que $\cos \alpha = -\cos(180 + \alpha)$. Entonces:

$$-\frac{3}{4} = -\cos(180 + \alpha) \Rightarrow \cos(180 + \alpha) = \frac{3}{4}$$

- $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$

Solución:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

- $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \frac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$

2. Relaciones entre las razones trigonométricas

a) Demuestra que las siguientes igualdades son ciertas:

- $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$

Solución:

Vamos a manipular primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A = \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

En $B = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$ vamos a reescribir el denominador de una forma más conveniente:

Teniendo en cuenta que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ se deduce que $1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$.
Entonces:

$$B = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Observamos que $A=B$, luego la identidad es verdadera.

$$\blacksquare \quad \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \cot g(\alpha) - \frac{2\sin(\alpha)}{\sqrt{1 + \cot^2 g(\alpha)}} = [\cos(\alpha) + \sin(\alpha)] \cdot \left(\frac{1}{\sec(\alpha)} - \frac{1}{\operatorname{cosec}(\alpha)} \right)$$

Solución:

Vamos a manipular primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \cot g(\alpha) - \frac{2 \cdot \sin(\alpha)}{\sqrt{1 + \cot^2 g(\alpha)}} = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} - \frac{2 \cdot \sin(\alpha)}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\alpha)}}} = 1 - \frac{2 \cdot \sin(\alpha)}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}}} = \\ &= 1 - \frac{2 \cdot \sin(\alpha)}{\sqrt{\frac{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}}} = 1 - \frac{2 \cdot \sin(\alpha)}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2(\alpha)}}} = 1 - 2 \cdot \sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

$$\begin{aligned} B &= [\cos(\alpha) + \sin(\alpha)] \cdot \left(\frac{1}{\sec(\alpha)} - \frac{1}{\operatorname{cosec}(\alpha)} \right) = [\cos(\alpha) + \sin(\alpha)] \cdot [\cos(\alpha) - \sin(\alpha)] = \\ &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2 \cdot \sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

Observamos que $A=B$, luego la identidad es cierta.

$$\blacksquare \quad \frac{1}{\sec^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$$

Solución:

Manipulamos primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A = \frac{1}{\sec^2 \alpha} = \cos^2 \alpha$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

$$B = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

Observamos que $A=B$, luego la identidad es cierta.

