1. Las características conocidas de una partícula que vibra armónicamente son la amplitud, $A = 10\,\text{cm}$, y la frecuencia, $f = 50\,\text{Hz}$. Halla la velocidad máxima y la aceleración máxima.

Solución:

a) Cálculo de la velocidad máxima:

La expresión de la velocidad viene dada por $v(t) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$, si es que consideramos que la elongación es $x(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$, de donde se deduce que será máxima cuando $\text{sen}(\omega t + \varphi) = -1$. En ese caso:

$$v(t)_{máx.} = A\omega$$

Recordando que ω y f se relacionan mediante $\omega = 2\pi f$, obtenemos ω:

$$\omega = 2\pi \cdot 50 = 100\pi\,\frac{1}{s}.$$

Ahora no nos queda más que llevar el valor de ω y de A a $v(t)_{máx.} = A\omega$:

$$v(t)_{máx} = A\omega \Rightarrow v(t)_{máx} = 10 \cdot \pi\,\frac{m}{s}$$

b) Cálculo de la aceleración máxima:

La expresión de la aceleración está dada por $a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$, siendo su valor máximo cuando $\cos(\omega t + \varphi) = -1$, o lo que es lo mismo:

$$a(t)_{máx} = A\omega^2$$

Sustituyendo los datos conocidos en $a(t)_{máx} = A\omega^2$ conseguimos el valor de la aceleración máxima:

$$a(t)_{máx} = A\omega^2 \Rightarrow a(t)_{máx} = 10 \cdot 10^2\ m \cdot \left(100\pi\ \frac{1}{s}\right)^2 \Rightarrow a(t)_{máx} = 10^6 \cdot \pi^2\ \frac{m}{s^2}$$

2. Un cuerpo de 15 g está sometido a un movimiento armónico simple de 10 cm/s de velocidad máxima y una amplitud de 30 cm. Halla la frecuencia y la constante recuperadora.

Solución:

a) Cálculo de la frecuencia:

La velocidad máxima está dada por $v(t)_{máx} = A\omega$. De aquí hallamos el valor de ω y una vez obtenido éste es fácil calcular la frecuencia, f, y la constante recuperadora, k.

$$v(t)_{máx} = A\omega \Rightarrow \omega = \frac{v(t)_{máx}}{A} \Rightarrow \omega = \frac{10}{30}\ \frac{cm/s}{cm} \Rightarrow \omega = \frac{1}{3}\ \frac{1}{s}$$

De aquí hallamos la frecuencia usando la relación $\omega = 2\pi f$:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{1/3}{2\pi}\ \frac{1}{s} \Rightarrow f = \frac{1}{6\pi}\ \frac{1}{s}$$

b) Cálculo de la frecuencia recuperadora

Para hallar el número de onda, k, tenemos que recordad la relación $k = m\omega^2$ y sustituir datos:

$$k = m\omega^2 \Rightarrow k = 15\cdot 10^{-3} kg \cdot \left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{s}\right)^2 \Rightarrow k = 15\cdot 10^{-3} kg \cdot \frac{1}{9}\frac{1}{s^2} \Rightarrow k = \frac{5\cdot 10^{-3}}{3}\ \frac{kg}{s^2}$$

3. Tenemos una partícula de 3 kg unida a un resorte de constante $k = 15\ N/m$. Estiramos el muelle una distancia de 4 cm. Halla:

a) La ecuación del movimiento de la partícula.
b) El periodo de oscilación.
c) La velocidad máxima de la partícula.
d) La aceleración máxima de la partícula.
e) El valor de la fuerza recuperadora cuando la partícula está a 2 cm de la posición en equilibrio.

Solución:

a) Ecuación del movimiento de la partícula

El movimiento es vertical. Por ello escribiremos la ecuación del movimiento en función de y:

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

En el instante inicial, t=0, la elongación será máxima, esto es, $y(0)=A=0{,}04\ \text{m}$. Ello implica que $\cos(\omega t+\varphi)=1$, o lo que es lo mismo, $\omega t+\varphi=2\pi n$. Por ello, la fase inicial es $\varphi=2\pi n$. Por simplicidad supondremos que n=1. Así que la ecuación del movimiento de la partícula es:

$$y(t)=0{,}04\cos(\omega t+2\pi).$$

En el siguiente apartado veremos que $\omega=\sqrt{5}\ \frac{1}{s}$, por lo que la ecuación de la posición queda finalmente como sigue:

$$y(t)=0{,}04\cos\left(\sqrt{5}\ t+2\pi\right)$$

b) Cálculo de la frecuencia:

Partimos de la ecuación $k=m\omega^2$, despejamos ω y luego hallamos f:

$$k=m\omega^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{15}{3}}\ \frac{1}{s} \Rightarrow \omega=\sqrt{5}\ \frac{1}{s}$$

Conocida ω es fácil hallar f:

$$f=\frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f=\frac{\sqrt{5}}{2\pi}\ \frac{1}{s}$$

c) La velocidad máxima de la partícula:

La expresión de la velocidad viene dada por $v(t)=-A\omega\,\text{sen}(\omega t+\varphi)$, de donde se deduce que será máxima cuando $\text{sen}(\omega t+\varphi)=-1$, es decir: $v(t)_{max}=A\omega$.

Sustituyendo datos:

$$v(t)_{max}=0{,}04\ \text{m}\cdot\sqrt{5}\ \frac{1}{s}=\frac{\sqrt{5}}{25}\ \frac{m}{s}=\frac{1}{\sqrt{5^3}}\ \frac{m}{s}$$

d) La aceleración máxima de la partícula:

La ecuación de la velocidad en cualquier momento es $a(t)=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$. Esta expresión es máxima cuando $\cos(\omega t+\varphi)=-1$. En ese caso:

$a(t)_{máx} = A\omega^2$.

Sustituyendo datos:

$$a(t)_{máx} = A\omega^2 \Rightarrow a(t)_{máx} = 0,04\ \text{m} \cdot \left(\sqrt{5}\ \frac{1}{\text{s}}\right)^2 = 0,2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

e) El valor de la fuerza recuperadora cuando la partícula está a 2 cm de la posición en equilibrio.

Se aplica la Ley de Hook y se sustituyen datos:

$$F = -kx \Rightarrow F = -15\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,02\ \text{m} \Rightarrow F = -0,3\ \text{N}.$$

El signo negativo de la fuerza significa que ésta impulsa a la partícula a ir hacia el punto de equilibrio.

4. Una partícula que se mueve con m.a.s comienza su movimiento en el extremo de su trayectoria. Si la distancia entre la posición de equilibrio y el extremo es de 15 cm y tarda 2 segundos en recorrer esta distancia, calcula:

a) El periodo del movimiento.
b) La pulsación.
c) La posición de la partícula 5 segundos después de que se haya iniciado el movimiento.

Solución:

a) Periodo del movimiento:

Tenemos que recordar que el periodo, T, es el tiempo que emplea la partícula en hacer un ciclo completo. En nuestro caso, T es el tiempo que tarda la partícula en recuperar la posición inicial una vez que la ha abandonado. O lo que es lo mismo, el periodo, T es el tiempo que tarda la partícula en recorrer la distancia 4A. Según el enunciado, se tarda 2 s en recorrer la distancia A, $t = 2\ \text{s}$, así que:

$$T = 4 \cdot t \Rightarrow T = 4 \cdot 2\ \text{s} \Rightarrow T = 8\ \text{s}$$

b) La pulsación:

La pulsación o velocidad angular, ω, está dada por $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Sustituyamos datos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{8\ s} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}\ \frac{1}{s}$$

c) La posición de la partícula en $t = 5\ s$:

La posición de la partícula para cualquier instante t viene dada por:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Como en $t = 0$ la partícula está en un extremo, deducimos de la ecuación de la posición que en ese instante $\cos(\omega \cdot 0 + \varphi)$, por lo que $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, esto es $\varphi = 2\pi n$.

Así que:

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow x(t) = 0{,}15\cos\left(\frac{\pi}{4}t + 2\pi n\right)$ y en $t = 5s$:

$$x(5) = 0{,}15\cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi\right) = 0{,}15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}$$

5. La amplitud de una partícula que se mueve con un movimiento armónico simple es de 5 cm y la velocidad máxima que alcanza es de 15 m/s. Halla:

a) La frecuencia, la pulsación y el periodo.
b) La aceleración máxima.
c) La velocidad de la partícula cuando se encuentra a 4 cm de la posición del equilibrio.

Solución:

a) Frecuencia, pulsación y periodo.

Tenemos que recordar que la velocidad máxima es $v(t)_{max} = A\omega$ y que la relación entre la pulsación y la frecuencia es $\omega = 2\pi f$.

Cálculo de la pulsación:

$$v(t)_{max} = A\omega \Rightarrow \omega = \frac{v(t)_{max}}{A} = \frac{15\ m/s}{0{,}05\ m} = 300\ \frac{m}{s}$$

Cálculo de la frecuencia:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow = f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{300\ s^{-1}}{2\pi} = \frac{150}{\pi}\ s^{-1}$$

Cálculo del periodo:

Empleamos la relación $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Despejamos T y sustituimos los datos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{300\ s^{-1}} = \frac{\pi}{150}\ s$$

b) Aceleración máxima

La aceleración máxima viene dada por $a(t)_{máx} = A\omega^2$. Sustituimos datos en ella:

$$a(t)_{máx} = A\omega^2 \Rightarrow a(t)_{máx} = 0{,}05\ m \cdot \left(\frac{150}{\pi}\ s^{-1}\right)^2 = \frac{1125}{\pi^2}\ \frac{m}{s^2}$$

c) La velocidad de la partícula a 4 cm de la posición de equilibrio:

La velocidad de la partícula, en un punto cualquiera x, está dada por $v(x) = \pm\omega\left[A^2 - x^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Sustituyendo los datos en ella obtenemos:

$$v(x) = \pm\omega\left[A^2 - x^2\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v(x) = \pm\frac{150}{\pi}\left[0{,}05^2 - 0{,}04^2\right]^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{150}{\pi}\cdot\frac{3}{100} =$$

$$= \pm\frac{9}{2\pi}\ \frac{m}{s}$$

6. Un cuerpo de 10 g vibra con un movimiento armónico simple con una amplitud de 50 cm y una frecuencia de 100 Hz. Calcula:

   a) La constante recuperadora.
   b) La velocidad del cuerpo a los 6 s de haber abandonado la posición de equilibrio.

Solución:

a) La constante recuperadora:

La constante recuperadora se puede deducir, usando los datos que nos dan, mediante la expresión $k = m\omega^2$.

Pero primero necesitamos la pulsación:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 200\pi \ s^{-1}$$

Entonces:

$$k = m\omega^2 \Rightarrow k = 0{,}01 \ kg \cdot \left(200\pi \ s^{-1}\right)^2 = 400\pi^2 \ \frac{kg}{s^2}$$

b) La velocidad del cuerpo a los 6 s después de haber abandonado la posición de equilibrio:

La expresión de la velocidad de la partícula en función del tiempo es, por ejemplo, $v(t) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$.

Sustituyendo en esta expresión todos los datos que tenemos obtenemos:

$$v(6) = -0{,}5 \cdot 200\pi \cdot \operatorname{sen}(200\pi \cdot 6) \Rightarrow v(6) = 0 \ \frac{m}{s}$$

7. Una onda armónica se propaga por un medio unidimensional con una frecuencia de 100 Hz y con una velocidad de propagación de 200 m/s.

a) Halla la distancia mínima que hay entre dos puntos del medio que oscilan con una diferencia de fase de 30º
b) Halla la diferencia de fase de oscilación en cierto punto para un intervalo de tiempo de 10^{-4} s.

Solución:

a) Para una longitud de onda la diferencia de fase es de 360º o 2π radianes. Calculemos el valor de una longitud de onda del enunciado

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{200}{100} = 2m\,.$$

Entonces: $30^{o} \cdot \dfrac{2m}{360^{o}} = \dfrac{1}{6} m$

b) La ecuación del movimiento se escribe, entre otras formas, como: $y(x,t) = A\operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi)$. Pero para resolver este apartado podemos manejar una versión mucho más simplificada. Así, elegimos una posición inicial $x = 0$ y un desfase inicial $\varphi = 0$. Por ello manejamos

$y(t)=A\mathrm{sen}(\omega t)$. El desfase es ωt. Si partimos de $t=0$, el valor de ωt para un intervalo de tiempo de $10^{-4}\mathrm{s}$, o lo que es lo mismo, para $10^{-4}\mathrm{s}$ después de $t=0$, será: $\omega t=2\pi f\cdot t=2\pi 100\cdot 10^{-4}=\frac{\pi}{50}$ rad

8. Una masa de 0,5 kg está unida a un muelle de periodo 1 s. La energía potencial máxima es de 15 J. calcula:

   c) La constante recuperadora.
   d) La amplitud del movimiento.

Solución:

a) La constante recuperadora:

La constante recuperadora se puede deducir mediante la expresión $k=m\omega^2$. No tenemos la pulsación, pero sí el periodo:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{1}\Rightarrow\omega=2\pi\ \mathrm{s}^{-1}$$

Entonces:

$$k=m\omega^2\Rightarrow k=0,5\cdot 2\pi\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}\Rightarrow k=\pi\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$$

b) La amplitud de movimiento:

La amplitud de movimiento la obtenemos a partir de la expresión de la energía potencial máxima:

$$E_{p\ \text{Máx}}=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow A=\sqrt{\frac{2\cdot\left(E_p\right)_{\text{Máx}}}{k}}\Rightarrow A=\sqrt{\frac{2\cdot 15}{\pi}}\Rightarrow A=\sqrt{\frac{30}{\pi}}\ \mathrm{m}$$

9. Sea una partícula de 100 g que vibra con movimiento armónico simple. A 5 cm de su punto de equilibrio la energía cinética y potencial tienen el mismo valor de 3 J. Halla:

   a) La amplitud.
   b) La frecuencia.

Solución:

a) La amplitud.

De la expresión de la energía potencial a 5 cm de la posición de equilibrio obtenemos la constante de recuperación y luego, teniendo en cuenta que la energía potencial máxima es 6 J, deducimos la amplitud:

$$E_p(0,05)=\frac{1}{2}k\cdot(0,05)^2\Rightarrow 3=\frac{0,0025}{2}k\Rightarrow k=2400\ \frac{N}{m}$$

b) La frecuencia.

A partir de la constante de recuperación obtenemos la pulsación y a partir de ésta la frecuencia:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{2400}{0,1}}\Rightarrow\omega=154,9\ s^{-1}$$

10. De un resorte se cuelga una masa de 15 kg, produciéndose un alargamiento de 10 cm. Si estiramos el sistema resorte-masa una distancia de 6 cm, calcula:

a) La constante elástica del muelle
b) La amplitud del movimiento.
c) El periodo del movimiento.
d) La energía potencial elástica del muelle justo cuando dejamos en libertad la masa.

Solución:

a) La constante elástica del muelle

Usamos la expresión $kx=mg$, de donde despejamos la constante elástica:

$$kx=mg\Rightarrow k=\frac{mg}{x}\Rightarrow k=\frac{15\cdot 9,8}{0,1}\ \frac{N}{m}\Rightarrow k=1470\ \frac{N}{m}$$

b) La amplitud del movimiento:

La amplitud del movimiento es sencillamente 6 cm respecto de la posición de equilibrio.

c) El periodo del movimiento:

De la contante de equilibrio podemos obtener la pulsación y de ésta el periodo. Pero podemos emplear directamente la expresión siguiente y sustituir los datos que tenemos en ella:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{15}{1450}} \Rightarrow T = 0{,}2\pi \text{ s}$$

d) La energía potencial elástica del muelle justo cuando dejamos en libertad la masa.

Cuando dejamos en libertad el muelle, la elongación es máxima, es decir, x=A. En ese caso:

$$E_{p\ \text{Máx}} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}1470\ \frac{\text{N}}{\text{m}}(0{,}06\text{ m})^2 = 2{,}65\text{ J}$$

11. Un péndulo simple oscila con una elongación máxima de 18º, desarrollando 10 oscilaciones por segundo. La posición inicial es la de equilibrio. Escribe la ecuación de la elongación en función del tiempo.

Solución:

- El problema no especifica si tenemos que obtener $\theta = \theta_{max}\text{sen}(\omega t + \varphi)$ o $x = A\text{sen}(\omega t + \varphi)$. Entonces supondremos que las dos expresiones son válidas.

- Pasos para escribir $\theta = \theta_{max}\text{sen}(\omega t + \varphi)$ en función de los datos dados:

  - Obtención de la pulsación, ω, a partir de la frecuencia, ν:

  $$\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \omega = 2\pi\cdot 10 \Rightarrow \omega = 20\pi\cdot s^{-1}$$

  Entonces: $\theta = \theta_{max}\text{sen}(20\pi t + \varphi)$ ó $x = x_{max}\text{sen}(20\pi t + \varphi)$

  - De la afirmación "*en* $t = 0$ *el péndulo esté en la posición de equilibrio*" deducimos el argumento del seno:

  En el equilibrio tendremos $t = 0$ y $\theta = 0$, es decir:

  $$\theta = \theta_{max}\text{sen}(\omega t + \varphi) \Rightarrow 0 = \theta_{max}\text{sen}(\omega\cdot 0 + \varphi) \Rightarrow 0 = \theta_{max}\text{sen}(\varphi) \Rightarrow \varphi = 0,$$

  Por ello: $\theta = \theta_{max}\text{sen}(\omega t + \varphi) \Rightarrow \theta = \theta_{max}\text{sen}(20\pi t)$

  - Consecuencia de que la elongación máxima sea de 18º:

Expresamos ese ángulo en radianes:

$$\theta_{max} = 18^o \frac{\pi}{180^o} = \frac{\pi}{10} rad$$

- Reunimos en $\theta = \theta_{max} sen(\omega t + \varphi)$ todos los resultados obtenidos:

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{10} sen(20\pi t)}$$

- Si queremos $x = A sen(\omega t + \varphi)$:
  - La pulsación, como hemos visto, es $\omega = 20\pi \cdot s^{-1}$
  - El desfase, como hemos visto, es $\varphi = 0$
  - Tenemos entonces: $x = A \cdot sen(20\pi t)$, pero debemos de encontrar A.

    Para desplazamientos angulares pequeños se cumple que $x = \theta \cdot L$, es decir: $x_{max} = \theta_{max} \cdot L \Rightarrow A = \theta_{max} \cdot L$

    No conocemos la longitud de la cuerda del péndulo, pero sí su frecuencia, que nos permite deducir L:

    $$\upsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{\upsilon^2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{9,8}{10^2}\ m = 2,48 \cdot 10^{-3} m$$

    De estos cálculos obtenemos A:

    $$A = \theta_{max} \cdot L \Rightarrow A = \frac{\pi}{10} \cdot 2,48 \cdot 10^{-3} = 7,8 \cdot 10^{-4}\ m$$

  - Finalmente reunimos lo obtenido:

    $$x = A sen(\omega t + \varphi) \Rightarrow x = 7,8 \cdot 10^{-4} \cdot sen(20\pi t)$$

12. Un péndulo simple oscila 10 veces en un segundo en la tierra. Determina el periodo de oscilación en la luna sabiendo que la gravedad lunar es un sexto de la terrestre.

Solución:

- El periodo es la inversa de la frecuencia. El periodo en la tierra será:

$$T_{tierra} = \frac{1}{\nu_{tierra}} \Rightarrow T_{tierra} = \frac{1}{10}\ s, \text{ siendo } T_{tierra} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \text{ la expresión general.}$$

- El periodo en la luna vendrá dado por:

$$T_{luna} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g/6}}$$

13. Un cuerpo de 20 kg que cuelga de un hilo de 2 m de longitud, se separa 6º de su posición de equilibrio y empieza a oscilar con un movimiento armónico simple.

a) Halla el periodo de oscilación.
b) Halla la velocidad máxima.
c) Halla la frecuencia angular.
d) Halla la aceleración máxima.
e) ¿Cuál es la energía mecánica del sistema?
f) Escribe la ecuación del movimiento de este péndulo.

Solución:

a) El periodo de oscilación:

La ecuación que gobierna el movimiento de un péndulo para desplazamientos muy pequeños es:

$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$, con $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Recordando que el periodo es $T = \frac{2\pi}{\omega}$, tendremos $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Sustituyendo datos:

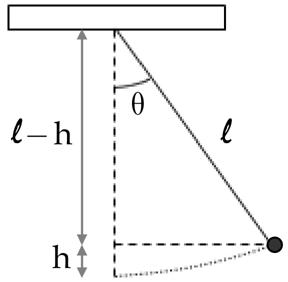
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{9,8}} = 0,9\pi \text{ s}$$

b) La velocidad máxima de la masa:

La energía potencial máxima (en el punto de mayor altura) tiene el mismo valor que la energía cinética máxima (en el punto de menor altura): $\frac{1}{2}mV^2 = mgh$

De aquí despejamos la velocidad:

$$\frac{1}{2}mV_{máx}^2 = mgh \Rightarrow V_{máx} = \sqrt{2gh}$$



La altura, en función del ángulo, se obtiene así:

$$l = (l-h) + h \Rightarrow l = l\cos\theta + h \Rightarrow h = l(1-\cos\theta)$$

Entonces:

$$V_{máx} = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)} = \sqrt{2\cdot 9,8\cdot 2(1-\cos 6)} \Rightarrow V_{máx} = 0,46\ \frac{m}{s}$$

c) La frecuencia angular:
La frecuencia es la inversa del periodo. Así que:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,9\pi} \Rightarrow f = 0,35\ s^{-1}$$

d) La aceleración máxima:

La aceleración máxima en cualquier m.a.s. viene dada por $a_{máx} = A\omega^2$. Necesitamos la amplitud A y la frecuencia angular o pulsación ω

- $A = l\cdot \text{sen}\theta = 2\cdot 0,1045 \approx 0,21\ m$
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,9\cdot\pi} \Rightarrow \omega = 2,22\ \frac{rad}{s}$

Entonces: $a_{máx} = 0,21\cdot 2,22^2 = 1,03\ \frac{m}{s^2}$

e) La energía mecánica del sistema:

La aceleración máxima en cualquier m.a.s. viene dada por $a_{máx} = A\omega^2$. Necesitamos la amplitud A:

$A = l\cdot \text{sen}\theta = 2\cdot 0,1045 \approx 0,21\ m$

f) Ecuación del movimiento del péndulo:

El péndulo, para pequeñas oscilaciones, está descrito por la ecuación $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$, cuya solución viene dada por $\theta = \theta_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$. Como θ es muy pequeño, podemos hacer la aproximación $\theta \approx \frac{x}{l}$, siendo $\theta_0 \approx \frac{A}{l}$.

Así que: $\theta = \theta_0 \text{sen}(\omega t + \phi) \Rightarrow x = A\text{sen}(\omega t + \phi)$, que es la ecuación del moviendo del péndulo en función de su posición lineal.

Necesitamos incluir en ella los valores de la amplitud, la frecuencia y el desfase:

- Consideramos que el péndulo comienza a oscilar en un extremo, por lo que en $t=0$ el valor de x es A. Entonces se deduce que: $A = A\text{sen}(\omega \cdot 0 + \phi) \Rightarrow 1 = \text{sen}(\phi) \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$
- La frecuencia angular es $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,9\cdot\pi} \Rightarrow \omega = 2,22\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- La amplitud es $A \approx l\cdot\theta_0 = 2\cdot 6^{\circ}\cdot\frac{\pi}{180^{\circ}} \Rightarrow A = 0,21\ \text{m}$

Entonces, finalmente, la ecuación del movimiento buscada es:

$$x = 0,21\cdot\text{sen}\left(2,22\cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

14. Una masa unida a un resorte de constante recuperadora k oscila con un M.A.S de amplitud A.

a) Cuando la elongación es un cuarto de la amplitud, ¿qué fracción de la energía total corresponde a la energía cinética, E_c, y qué fracción a la energía potencial, E_p, en el M.A.S.?

b) Encuentra para qué valor de la elongación la E_c y la E_p son iguales.

Solución:

- Recordamos que la energía mecánica está dada por la suma de la energía potencial y la energía cinética:

$$E_t = E_p + E_c$$

- La energía total es igual a la energía cinética máxima o energía potencial máxima. Por ello:

$E_t = E_p + E_c \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2_{\text{máx}} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$, o también:

$E_t = E_p + E_c \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$, que es la expresión que usaremos.

a) Si $x = \frac{A}{4}$, la energía mecánica se escribe como:

$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kx^2+E_c \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{A}{4}\right)^2+E_c \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kA^2\frac{1}{16}+E_c,$$ en

donde : $\boxed{E_p=\frac{1}{16}E_t}$

Tratamos de obtener ahora el valor de E_c

$$E_t=\frac{1}{16}E_t+E_c \Rightarrow E_c=E_t-\frac{1}{16}E_t \Rightarrow \boxed{E_c=\frac{15}{16}E_t}$$

b) Se tienen que cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} E_t=E_c+E_p \\ E_c=E_p \end{array}\right\},$$ en donde $E_c=E_p=\frac{1}{2}kx^2$

Entonces:

$$E_t=E_c+E_p \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{k}A^2=\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{k}\cdot 2x^2 \Rightarrow \boxed{x=\pm\frac{A}{\sqrt{2}}\ \text{m}}$$