Inecuaciones

Índice ejercicios resueltos

Ejercicios resueltos

A. Inecuaciones lineales con una incógnita

1. $-\frac{x-1}{4}+1<\frac{3x-3}{2}$

Solución:

$$-\frac{x-1}{4}+1<\frac{3x-1}{2}\Rightarrow-\frac{x-1}{4}+\frac{1\cdot 4}{4}<\frac{(3x-1)\cdot 2}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+3<6x-2\Rightarrow 5<5x\Rightarrow x>1\Rightarrow x\in(1,\infty)$$

2. $\frac{x-2}{3}-\frac{x-1}{4}>\frac{x-3}{2}-1$

Solución:

$$\frac{x-2}{3}-\frac{x-1}{4}>\frac{x-3}{2}-1\Rightarrow\frac{4(x-2)}{12}-\frac{3(x-1)}{12}>\frac{6(x-3)}{12}-\frac{12}{12}$$

$$\Rightarrow 4x-8-3x+3>6x-18-12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x>-25\Rightarrow x<5\Rightarrow \boxed{x\in(-\infty,5)}$$

B. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita

3. $x^2-8x+12\le 0$

Solución:

Obtenemos las raíces de $x^2-8x+12=0$ con dos fines: Primero, factorizar el polinomio que aparece en el primer miembro y segundo, determinar las tres zonas a estudiar para las que se verifica la inecuación:

$$x^2-8x+12=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 12}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{2}=\begin{cases}x_1=6\\ x_2=2\end{cases}, \text{ por lo que:}$$

$$x^2-8x+12\le 0 \Rightarrow (x-2)(x-6)\le 0$$

Estos dos puntos determinan tres zonas: los valores menores o iguales que 2, los valores comprendidos entre 2 y 6, ambos incluidos, y los valores mayores o iguales que 6. Veamos en cuáles de estas tres zonas se satisface la inecuación:

	zona 1 $(-\infty,2]$	zona 2 $[2,6]$	zona 3 $[6,\infty)$
$(x-2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-6)$	$-$	$-$	$+$
$(x-2)(x-6)$	$+$	$-$	$+$

Vía rápida de solución:
La inecuación $(x-p)(x-q)\le 0$, con $p<q$, tiene por solución el intervalos $[p,q]$

Conclusión:

Sólo la zona 2 satisface la ecuación, es decir, la solución final es: $\boxed{x\in[2,6]}$

4. $x^2+x-6>0$

Solución:

Obtenemos las raíces de $x^2+x-6=0$ con dos fines: Primero, factorizar el polinomio que aparece en el primer miembro y segundo, determinar las tres zonas a estudiar para las que se verifica la inecuación.

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-6)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\begin{cases}x_1=3\\ x_2=-2\end{cases}, \text{ por lo que:}$$

$$x^2+x-6>0 \Rightarrow (x-3)(x+2)>0$$

	zona 1 $(-\infty,-2)$	zona 2 $(-2,3)$	zona 3 $(3,\infty)$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
$(x-3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

Vía rápida de solución:
La inecuación $(x-p)(x-q)>0$, con $p<q$, tiene por soluciones los intervalos $(-\infty,p)\cup(q,\infty)$

Conclusión:

La zona 1 y la zona 3 satisfacen la ecuación, es decir, la solución final es:

$$\boxed{x\in(-\infty,-2)\cup(3,\infty)}$$

C. Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita

5. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{4x-1}{3}-\dfrac{x}{2}\geq 5\\ \dfrac{x-5}{3}+\dfrac{x}{2}>1\end{array}\right\}$

<u>Solución</u>:

Se resuelve cada una de las inecuaciones lineales. El resultado final es la intersección de ambas soluciones:

a.1 $\dfrac{4x-1}{3}-\dfrac{x}{2}\geq 5\Rightarrow 8x-2-3x\geq 30\Rightarrow 5x\geq 32\Rightarrow x\geq\dfrac{32}{5}\Rightarrow x\in\left[\dfrac{32}{5},\infty\right)$

a.2 $\dfrac{x-5}{3}+\dfrac{x}{2}>1\Rightarrow 2x-10+6x>6\Rightarrow 8x>16\Rightarrow x>2\Rightarrow x\in(2,\infty)$

Así que la solución es:

$$x\in\left[\frac{32}{5},\infty\right)\cap x\in(2,\infty)\Rightarrow\boxed{x\in\left[\frac{32}{5},\infty\right)}$$

6. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+3}{2}-2x>\dfrac{5x-3}{3}-2\\ \dfrac{x-2}{3}+1<\dfrac{x+3}{2}+x\end{array}\right\}$

<u>Solución</u>:

Se resuelve cada una de las inecuaciones lineales. El resultado final es la intersección de ambas soluciones:

a.1 $\dfrac{x+3}{2}-2x>\dfrac{5x-3}{3}-2\Rightarrow 3x+9-12x>10x-6-12\Rightarrow x\in\left(-\infty,\dfrac{27}{19}\right)$

a.2 $\dfrac{x-2}{3}+1<\dfrac{x+3}{2}+x\Rightarrow 2x-4+6<3x+9\Rightarrow x\in(-1,\infty)$

Así, la solución está dada por:

$$x \in x \in \left(-\infty, \frac{27}{19}\right) \cup x \in (-1, \infty) \Rightarrow \boxed{x \in \left(-1, \frac{27}{19}\right)}$$

D. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

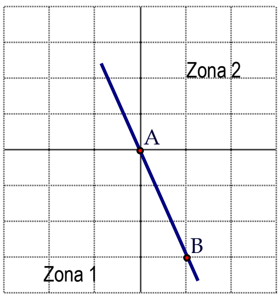
7. $x + 3y \leq 0$

Solución:

Se representa la recta $x + 3y = 0$ y luego se estudia en cuál de las dos regiones que determina la recta se satisface la inecuación:

Obtención de dos puntos para hacer la representación de la recta:

Si **x** es cero entonces **y** también lo es, por lo que un punto es A(0,0). Por otro lado, si y=1 entonces x=-3, luego otro punto es B(1,-3)



Ahora elegimos un "punto prueba" cualquiera de una de las dos regiones del plano que determina la recta, por ejemplo el C(1,1) y lo sustituimos en la inecuación:

$$1 + 3 \cdot 1 \leq 0$$

Obviamente no se satisface para ese punto.

Entonces:

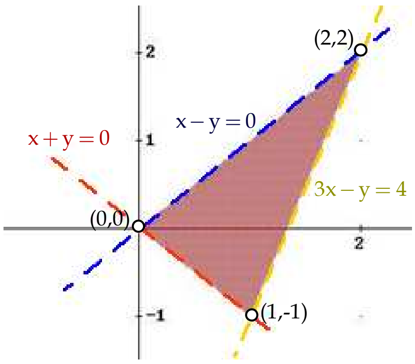
La solución de la inecuación es la zona 1. Decir también, que la recta está incluida en la solución de la inecuación debido al signo $\leq$.

8. $\left.\begin{array}{r} x - y > 0 \\ 3x - y < 4 \\ x + y > 0 \end{array}\right\}$

Solución:

- Se representan gráficamente, en el mismo plano, las ecuaciones $x - y = 0$, $3x - y = 4$ y $x + y = 0$, **prestando especial atención a si los puntos de cada una de las rectas forman parte o no de la solución**. En nuestro caso, los puntos de todas las rectas no forman parte de la solución, ya que en ellas no aparece el signo "=". Esto se representa mediante trazos discontinuos.

Se puede comprobar que sólo la región interior determinada por las 3 rectas satisface simultáneamente el sistema. Ésta región es la solución que buscamos.



E. Inecuaciones de valor absoluto

9. $|1-3x|<5$

Solución:

Cuando tenemos una inecuación del tipo $|f(x)|\leq t$, con t un número positivo, entonces podemos escribir $|f(x)|\leq t \Leftrightarrow -t\leq f(x)\leq t$

En nuestro caso:

$$|1-3x|<5 \Leftrightarrow -5<1-3x<5 \Leftrightarrow -6<-3x<4 \Leftrightarrow 2>x>-\frac{4}{3}$$

es decir: $x\in\left(-\frac{4}{3},2\right)$

10. $|x^2-4x|>0$

Solución:

Una inecuación del tipo $|f(x)|\geq t$, con t un número positivo, verifica:
p $|f(x)|\leq t \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\geq t \quad ó \quad -f(x)\geq t$

En nuestro caso:

$$\left|x^2-4x\right|>0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x>0 \quad \text{ó} \quad -\left(x^2-4x\right)>0$$

- Resolvemos $x(x-4)>0$:

  Las soluciones de $x(x-4)=0$ son 0 y 4. Como la inecuación de segundo grado es del tipo $ax^2+bx+c\geq 0$, las soluciones son $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$

- Resolvemos $-x(x-4)>0$

  $-x(x-4)>0 \Rightarrow x(x-4)<0$

  Las soluciones de $x(x-4)=0$ son 0 y 4. Como la inecuación de segundo grado es del tipo $ax^2+bx+c\leq 0$, las soluciones son $(0,4)$

Conclusión:

$$x\in\{(-\infty,0)\cup(4,\infty)\}\cup(0,4)\Rightarrow \boxed{x\neq 0 \;\text{ y }\; x\neq 0}$$

F. Inecuaciones racionales

11. $\dfrac{x+2}{x-3}<0$

Solución:

- Esta inecuación racional se satisface de dos formas distintas:

  a) Si el numerador es positivo y el denominador negativo:

  $$\left.\begin{array}{l} x+2>0 \\ x-3<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x>-2 \\ x<3 \end{array}\right\} \Rightarrow x\in(-2,3)$$

  b) Si el numerador es negativo y el denominador positivo:

  $$\left.\begin{array}{l} x+2<0 \\ x-3>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x<-2 \\ x>3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No hay solución.}$$

Conclusión final:

La solución viene dada por $\boxed{x\in(-2,3)}$.

12. $\dfrac{1}{x+1} \leq 1 + \dfrac{2}{x-1}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{1}{x+1} \leq 1 + \frac{2}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{x+1} - 1 - \frac{2}{x-1} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-1-(x+1)(x-1)-2(x+1)}{(x+1)(x-1)} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2-x-2}{(x+1)(x-1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{-x^2-x-2}{(x+1)(x-1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2+x+2}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

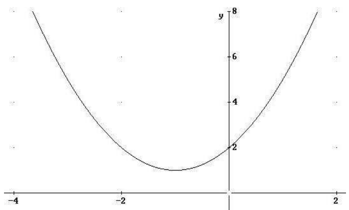
Esta inecuación racional se satisface de simultáneamente de dos formas:

a.1 Cuando el numerador y el denominador son positivos.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x+2 \geq 0 \\ (x+1)(x-1) > 0 \end{array}\right\}$$

- Solución para $x^2+x+2 \geq 0$:

La ecuación $x^2+x+2=0$ no tiene soluciones. Además el valor del coeficiente **a** es positivo. Ello quiere decir que $y = x^2+x+2$ nunca corta al eje x, y que está siempre por encima de él, tal como se muestra en la gráfica. Así que la inecuación se verifica para todos los valores de x, es decir, $x \in (-\infty, \infty)$



Sea cual sea el valor de x, x^2+x+2 va a ser mayor que cero

- Solución para $(x+1)(x-1) > 0$:

	zona 1 $(-\infty,-1)$	zona 2 $(-1,1)$	zona 3 $(1,\infty)$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-1)$	$+$	$-$	$+$

Entonces, los intervalos que satisface la inecuación son $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

- **La solución del sistema es la intersección de ambos sistemas:**

$$x \in (-\infty,\infty) \cup \{x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)\} \Rightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$$

a.2 Cuando el numerador como el denominador son negativos.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x+2 \le 0 \\ (x+1)(x-1) < 0 \end{array}\right\}$$

- La inecuación $x^2+x+2 \le 0$ no se satisface jamás, así que para ella no hay solución. No hace falta tomarse la molestia de estudiar $(x+1)(x-1) < 0$. Ésta es la explicación:

  Como en este sistema de dos ecuaciones una de ellas no posee solución, entonces, recordando que la solución del sistema es la intersección de las soluciones correspondientes a las dos ecuaciones, podemos afirmar que el sistema no tiene solución.

Conclusión final:

La solución de la ecuación racional $\dfrac{1}{x+1} \le 1+\dfrac{2}{x-1}$ viene dada por la unión de las soluciones de los sistemas que hemos estado discutiendo, y es: $\boxed{x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)}$.

***