

## GEOMETRÍA ANALÍTICA

---

### A. Introducción teórica

- A.1. Módulo y argumento de un vector.
- A.2. Producto escalar.
- A.3. Punto medio de un segmento.
- A.4. Ecuaciones de la recta.
- A.5. Ecuación de una recta dados dos puntos.
- A.6. Posiciones relativas de dos rectas.
- A.7. Ecuación de una circunferencia.

### B. Ejercicios resueltos

- A.1. Operaciones con vectores. Coordenadas.
- A.2. Módulo y argumento de un vector.
- A.3. Posiciones relativas entre vectores.
- A.4. Ecuación de una recta dados dos puntos. Alineación de puntos.
- A.5. Ecuaciones de la recta.
- A.6. Posición relativa entre rectas.
- A.7. Ecuación de una circunferencia.

## A. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

### A.1 Módulo y argumento de un vector.

El módulo de  $\vec{u} = (a, b)$  es:  $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$  y el argumento de  $\vec{u} = (a, b)$ , que denotamos por  $\alpha$ , es  $\alpha = \operatorname{artg} \frac{b}{a}$

### A.2 Producto escalar

El producto escalar de dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  está dado por:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$ , en donde  $\alpha$  es el ángulo formado por los dos vectores.

Si conocemos las coordenadas de los vectores, esto es,  $\vec{u} = (a, b)$  y  $\vec{v} = (c, d)$ , entonces  $\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot c + b \cdot d$

### A.3 Punto medio de un segmento.

Si  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$ , entonces el punto medio es  $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

### A.4 Ecuaciones de la recta.

a) Ecuación vectorial:  $(x, y) = (a, b) + \lambda(v_1, v_2)$

b) Ecuaciones paramétricas: 
$$\left. \begin{array}{l} x = a + \lambda v_1 \\ y = b + \lambda v_2 \end{array} \right\}$$

c) Ecuación continua:  $\frac{x - a}{v_1} = \frac{y - b}{v_2}$

d) Ecuación general:  $Ax + Bx + C = 0$ , tal que  $\vec{v}_\perp(A, B)$ ,  $\vec{v}(B, -A)$ ,  
 $m = -\frac{A}{B}$

e) Ecuación explícita:  $y = mx + b$ , con  $m$  la pendiente y  $b$  la ordenada en el origen.

f) Ecuación punto pendiente:  $y = y_1 + m(x - x_1)$

### A.5 Ecuación de una recta dados dos puntos

- La ecuación de una recta que pasa por los puntos  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  está dada por:  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ .

- Si tenemos tres puntos,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  y  $C(x_3, y_3)$ , y están alineados, entonces verifican la siguiente ecuación:  $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$

### A.6 Posición relativa entre rectas

- Dos rectas  $r$  y  $s$  son paralelas,  $r \parallel s$ , si tienen la misma pendiente:  
 $m_r = m_s$ .
- Dos rectas  $r$  y  $s$  son perpendiculares,  $r \perp s$ , si sus pendientes verifican:  
 $m_r \cdot m_s = -1$ .

### A.7 Ecuación de una circunferencia

- $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  es la ecuación general de una circunferencia, cuyo centro y radio están dadas, respectivamente por:

a)  $O\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ .

b)  $r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ .

Lo anterior es equivalente a lo siguiente:

- $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  es la ecuación de una circunferencia que tiene por origen  $O(a, b)$  y radio  $r$ .

## B. EJERCICIOS RESUELTOS

### B.1. Operaciones con vectores. Coordenadas.

1. Sean los vectores:  $\vec{u} = (-1, 0)$ ,  $\vec{v} = (1, 2)$  y  $\vec{w} = (0, -1)$ . Calcula:

a)  $-\vec{u} + 3\vec{v}$     b)  $\vec{w} - \vec{u} - 2\vec{v}$     c)  $\vec{u} - (2\vec{w} + \vec{v})$

Solución:

a)  $-\vec{u} + 3\vec{v} = -(-1, 0) + 3(1, 2) = (1, 0) + (3, 6) = (4, 6)$

b)  $\vec{w} - \vec{u} - 2\vec{v} = (0, -1) - (-1, 0) - 2(1, 2) = (-1, -5)$

c)  $\vec{u} - (2\vec{w} + \vec{v}) = (-1, 0) - [2(0, -1) + (1, 2)] = (-1, 0) - [2(0, -1) + (1, 2)] = (-1, 0) - (1, 0) = (-2, 0)$

2. Halla los vectores definidos por cada una de las siguientes parejas de puntos:

a)  $A(-1, 2)$  y  $B(2, -3)$     b)  $C(2, -2)$  y  $D(-1, -3)$     c)  $E\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  y  $F\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}\right)$

Solución:

En general, las coordenadas de un vector que tiene su origen en  $P(p_1, p_2)$  y extremo en  $Q(q_1, q_2)$  vienen dadas por:

$$\overrightarrow{PQ} = (q_2 - p_2, q_1 - p_1).$$

Entonces:

a)  $\overrightarrow{AB} = (2 + 1, -1 - 2) = (3, -3)$

b)  $\overrightarrow{CD} = (-1 + 2, -3 - 2) = (1, -5)$

c)  $\overrightarrow{EF} = \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2}, \frac{1}{5} + 1\right) = \left(-\frac{7}{6}, \frac{6}{5}\right)$

**Nota:**

Consideramos que A, C y E son  
orígenes, mientras que B, D y F  
son extremos.

3. Sean los vectores:  $\vec{u} = (-1, 2)$ ,  $\vec{v} = (-3, 0)$  y  $\vec{w} = (-5, -1)$ . Calcula los siguientes productos escalares:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$     b)  $\vec{w} \cdot \vec{u}$     c)  $2 \cdot (\vec{w} \cdot \vec{v})$

Solución:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 2) \cdot (3, 0) = -1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = -3$

b)  $\vec{w} \cdot \vec{u} = (-5, -1) \cdot (-1, 2) = (-5)(-1) + (-1)2 = 5 - 2 = 3$

c)  $2 \cdot (\vec{w} \cdot \vec{v}) = 2 \cdot (-5, -1) \cdot (-3, 0) = 2 \cdot (-5)(-3) + (-1) \cdot 0 = 30$

## B.2. Módulo y argumento de un vector

4. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

a)  $\vec{u} = (-3, 2)$     b)  $\vec{v} = (4, -5)$     c)  $\vec{w} = (-4, -2)$

Solución:

- El módulo de un vector cualquiera,  $\vec{r}$ , expresado mediante sus coordenadas,  $\vec{r} = (a, b)$ , viene dado por:

$|\vec{r}| = \sqrt{a^2 + b^2}$  y el argumento de  $\vec{u} = (a, b)$ , que denotamos por  $\alpha$ , es

$$\alpha = \operatorname{artg} \frac{b}{a}$$

Así:

- a)  $\vec{u} = (-3, 2) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$  unidades.  
 b)  $\vec{v} = (4, -5) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$  unidades.  
 c)  $\vec{w} = (-4, -2) \Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$  unidades.

5. Halla el módulo y el argumento de un vector  $\vec{u}$  que tiene por origen el punto  $O(2,3)$  y por extremo el punto  $P(4,5)$ .

Solución:

- El vector  $\vec{u}$ , conocidos sus extremos es:  $\vec{u}(4-2, 5-3) = \vec{u}(2, 2)$
- El módulo de  $\vec{u}(a, b)$  es:  $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{8}$
- El argumento de  $\vec{u} = (a, b)$ , que denotamos por  $\alpha$ , es:  

$$\alpha = \operatorname{artg} \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \operatorname{artg} 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

6. Halla la distancia entre los puntos  $A(0,3)$  y  $B(4,-1)$ .

Solución:

La distancia entre dos puntos  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  viene dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

En nuestro caso:  $d(A, B) = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{2}$

### B.3. Posiciones relativas entre vectores

7. Halla un vector normal para cada uno de los siguientes vectores:

a)  $\vec{u}_1 = (-1, 2)$    b)  $\vec{u}_2 = (1, -2)$    c)  $\vec{u}_1 = \left(-\frac{1}{2}, -5\right)$

Solución:

- a) Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero. Así, un vector  $\vec{p} = (x, y)$  perpendicular a  $\vec{u}_1$  cumplirá  $\vec{u}_1 \cdot \vec{p} = 0$ :

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow (-1, 2) \cdot (x, y) = 0 \Rightarrow -x + 2y = 0$$

Pero hay infinitos valores de  $x$  e  $y$  que verifican esto. Si hacemos que  $x=2$ , por ejemplo, un vector perpendicular a  $\vec{u}_1$  nos dará:

$$-2 + 2y = 0 \Rightarrow y = 1, \text{ por lo que } \vec{p} = (x, y) \Rightarrow \vec{p} = (2, 1).$$

b)  $\vec{u}_2 \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow (1, -2) \cdot (x, y) = 0 \Rightarrow x - 2y = 0$ . Si suponemos que  $x=1$ , por ejemplo, entonces:  $x - 2y = 0 \Rightarrow 1 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ .

Un vector perpendicular al dado es, por lo tanto,  $\vec{p} = \left(2, \frac{1}{2}\right)$

c)  $\vec{u}_3 \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -5\right) \cdot (x, y) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x - 5y = 0$ .

Vamos a suponer que  $y = -\frac{1}{5}$ . En ese caso,  $x$  valdrá lo siguiente:

$$-\frac{1}{2}x - 5y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x - 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Rightarrow x = 2$$

Así que  $\vec{p} = \left(2, -\frac{1}{5}\right)$

8. Halla un vector perpendicular a  $\vec{u} = (-3, 2)$  y con su mismo módulo.

Solución:

Un vector  $\vec{v} = (a, b)$  que sea perpendicular a  $\vec{u}$  cumplirá que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , es decir:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (-3, 2) \cdot (a, b) = 0 \Rightarrow -3a + 2b = 0$

El módulo de  $\vec{u}$  está dado por:  $|\vec{u}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ . Entonces:  $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13} \Rightarrow a^2 + b^2 = 13$

Estas dos ecuaciones forman un sistema. Resolviéndolo obtenemos las coordenadas del vector buscado:

$$\left. \begin{array}{l} -3a + 2b = 0 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b) = \begin{cases} (2, 3) \\ (-2, -3) \end{cases}$$

(Observamos que hay dos vectores distintos que verifican las condiciones del enunciado)

9. Halla un vector paralelo a  $\vec{v} = (1, 2)$ , con sentido contrario y con un módulo igual al del vector  $\vec{w} = (0, -1)$ .

Solución:

Un vector  $\vec{u} = (a, b)$  que sea paralelo a  $\vec{v}$  cumplirá que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = k$ , es decir:  
 $\vec{v} \cdot \vec{u} = 1 \Rightarrow (1, 2)(a, b) = 1$

Si  $\vec{u}$  tiene sentido contrario a  $\vec{v}$  entonces será  $\vec{u} = (-a, -b)$ :

Por ello  $(1, 2)(-a, -b) = 1 \Rightarrow a + 2b = -1$

El módulo de  $\vec{w}$  está dado por  $|\vec{w}| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$  y como  $|\vec{w}| = |\vec{u}|$ , entonces se puede escribir que:  $|\vec{u}| = a^2 + b^2 = 1$

Tenemos entonces un sistema de ecuaciones que nos dará el vector buscado:

$$\left. \begin{array}{l} a + 2b = -1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b) = \left\{ \begin{array}{l} (-1, 0) \\ \left( \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) \end{array} \right.$$

(Vemos que hay dos vectores que satisfacen las condiciones del enunciado)

10. Determina el ángulo que forman los vectores  $\vec{u} = (2, 1)$  y  $\vec{v} = (1, -2)$

Solución:

El ángulo formado por dos vectores viene dado por:  $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ , esto

$$\text{es: } \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(-2, 1) \cdot (1, 3)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{1+9}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$$

#### B.4. Ecuación de una recta dados dos puntos. Alineación de puntos

11. Calcula cada una de las tres ecuaciones de una recta, escrita en forma general,  $y = mx + n$ , que pasan por cada una de las siguientes parejas de puntos:

a)  $A(-1, 2)$  y  $B(2, -3)$     b)  $A(-3, 2)$  y  $B(4, -5)$     c)  $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  y  $B\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}\right)$

Solución:

Recordamos que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos

$$A(x_1, y_1) \text{ y } B(x_2, y_2) \text{ está dada por: } \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

d) Para  $A(-1, 2)$  y  $B(2, -3)$ :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \frac{x+1}{2+1} = \frac{y-2}{-3-2} \Rightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{2-y}{5} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$$

e) Para  $A(-3, 2)$  y  $B(4, -5)$ :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \frac{x+3}{4+3} = \frac{y-2}{-5-2} \Rightarrow \frac{x+3}{7} = \frac{2-y}{7} \Rightarrow y = -x-1$$

f) Para  $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  y  $B\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}\right)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \frac{x-\frac{1}{2}}{-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{\frac{1}{5}-1} \Rightarrow \frac{x+\frac{3}{6}}{\frac{-2-1.5}{3}} = \frac{y-1}{\frac{1-5}{5}} \Rightarrow \frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{-3.5}{3}} = \frac{y-1}{\frac{-4}{5}} \Rightarrow \frac{x+\frac{3}{2}}{-\frac{7}{6}} = \frac{y-1}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{7}{6}} = \frac{y-1}{\frac{4}{5}} \Rightarrow y = \frac{48}{35}x + \frac{11}{35}$$

12. Calcula la coordenada  $x$  que tiene que tener el punto  $B$ ,  $B(x_2, 4)$ , para que los puntos  $A(1,1)$ ,  $B(x_2, -4)$  y  $C(0,6)$  estén alineados.

Solución:

Para que tres puntos  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  y  $C(x_3, y_3)$  estén alineados, han

de verificar la siguiente ecuación:  $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_2}$

Entonces, en nuestro caso:  $\frac{x_2-1}{0-x_2} = \frac{-4-1}{6+4} \Rightarrow \frac{x_2-1}{-x_2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow x_2 = 4$

## B.5. Ecuaciones de la recta

13. Expresa la ecuación de una recta que pasa por  $P(5,2)$  y tiene como vector director a  $\vec{u}(-4,2)$  en las formas vectorial, paramétrica, continua, general, explícita y punto-pendiente.

Solución:

a) Ecuación vectorial:

Viene dada por  $\vec{r} = P + \lambda \vec{u} \Rightarrow (x, y) = (a, b) + \lambda(u_1, u_2)$ .

Simplemente hay que sustituir los datos en la expresión:

$$(x, y) = (5, 2) + \lambda(-4, 2)$$

b) Ecuaciones paramétricas:

Vienen dada por: 
$$\left. \begin{array}{l} x = a + \lambda u_1 \\ y = b + \lambda u_2 \end{array} \right\}$$

Sustituimos los datos en la expresión: 
$$\left. \begin{array}{l} x = 5 - 4\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{array} \right\}$$

c) Ecuación continua:

La ecuación continua está dada por 
$$\frac{x-a}{u_1} = \frac{y-b}{u_2}$$

Sustituimos en ella los datos dados: 
$$\frac{x-5}{-4} = \frac{y-2}{2}$$

d) Ecuación general:

La ecuación general está dada por:  $Ax + By + C = 0$ . Podemos obtenerla reescribiendo la ecuación continua:

$$\frac{x-5}{-4} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow 2x - 10 = -4y + 8 \Rightarrow 2x + 4y - 18 = 0$$

e) Ecuación explícita:

La ecuación explícita es de la forma  $y = ax + b$ . La podemos obtener a partir de la ecuación general reescribiéndola:

$$2x + 4y - 18 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 9$$

f) Forma punto-pendiente:

Esta forma de escribir la ecuación de la recta es así:  $y - b = m(x - a)$

Sustituimos en la expresión los datos conocidos:  $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 5)$

## B.6. Posición relativa entre rectas

14. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P(2,1)$  y es paralela a la recta  $r: y=2x+1$ . Luego halla la ecuación de la recta  $t$  que pasando por el mismo punto es perpendicular a  $r$ .

Solución:

- Caso  $r \parallel s$

En este caso, las dos rectas tienen la misma pendiente:  $m_s = m_r = 2$

Obtenemos la recta en la forma punto-pendiente:

$$y - y_p = m(x - x_p) \Rightarrow y - 2 = 2 \cdot (x - 1)$$

- Caso  $r \perp s$

En este caso, la pendiente de la recta  $s$  está dada por:  $m_s = \frac{-1}{m_r} = -\frac{1}{2}$

Obtenemos la recta en la forma punto-pendiente:

$$y - y_p = m(x - x_p) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1)$$

## B.7. Ecuación de una circunferencia

15. Halla la ecuación de una circunferencia de origen  $O(1,3)$  y radio 5 unidades.

Solución:

La ecuación de una recta de origen  $O(a,b)$  y radio  $r$  está dada por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Sustituimos datos en esa expresión:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

Por último, ordenamos los términos:

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$$

16. Calcula el radio y el origen de una circunferencia que tiene la siguiente ecuación  $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ .

Solución:

Tenemos que saber que una circunferencia que tiene por ecuación general a  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  su centro y su radio están dados respectivamente por:

c)  $O\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ .

d)  $r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ .

En nuestro caso, los datos dados son:  $A = -2$ ;  $B = -6$ ;  $C = -15$

Sustituyendo los datos en las expresiones para el centro y el radio, obtenemos lo siguiente:

a) El centro:  $O\left(-\frac{(-2)}{2}, -\frac{(-6)}{2}\right) = O(1, 3)$

b) El radio:  $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 - 4(-15)} = \frac{10}{2} = 5$