GEOMETRÍA ANALÍTICA

A. Introducción teórica

B. Ejercicios resueltos

A. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

A.1 Módulo y argumento de un vector.

El módulo de $\vec{u}=(a,b)$ es: $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2}$ y el argumento de $\vec{u}=(a,b)$, que denotamos por α, es $\alpha=\text{artg}\dfrac{b}{a}$

A.2 Producto escalar

El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ está dado por:

$\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\alpha$, en donde α es el ángulo formado por los dos vectores.

Si conocemos las coordenadas de los vectores, esto es, $\vec{u}=(a,b)$ y $\vec{v}=(c,d)$, entonces $\vec{u}.\vec{v}=a\cdot c+b\cdot d$

A.3 Punto medio de un segmento.

Si $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, entonces el punto medio es $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

A.4 Ecuaciones de la recta.

a) Ecuación vectorial: $(x,y)=(a,b)+\lambda(v_1,v_2)$

b) Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{matrix} x=a+\lambda v_1 \\ y=b+\lambda v_2 \end{matrix}\right\}$

c) Ecuación continua: $\frac{x-a}{v_1}=\frac{y-b}{v_2}$

d) Ecuación general: Ax+Bx+C=0, tal que $\vec{v}_{\perp}(A,B)$, $\vec{v}(B,-A)$, $m=-\frac{A}{B}$

e) Ecuación explícita: $y=mx+b$, con m la pendiente y b la ordenada en el origen.

f) Ecuación punto pendiente: $y=y_1+m(x-x_1)$

A.5 Ecuación de una recta dados dos puntos

- La ecuación de una recta que pasa por los puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ está dada por: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.
- Si tenemos tres puntos, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ y $C(x_3,y_3)$, y están alineados, entonces verifican la siguiente ecuación: $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_2}$

A.6 Posición relativa entre rectas

- Dos restas r y s son paralelas, $r \parallel s$, si tienen la misma pendiente: $m_r = m_s$.

- Dos restas r y s son perpendiculares, $r \perp s$, si sus pendientes verifican: $m_r \cdot m_s = -1$.

A.7 Ecuación de una circunferencia

- $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ es la ecuación general de una circunferencia, cuyo centro y radio están dadas, respectivamente por:

  a) $O\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.

  b) $r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$.

Lo anterior es equivalente a lo siguiente:

- $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ es la ecuación de una circunferencia que tiene por origen $O(a,b)$ y radio r.

B. EJERCICOS RESUELTOS

B.1. Operaciones con vectores. Coordenadas.

1. Sean los vectores: $\vec{u} = (-1,0)$, $\vec{v} = (1,2)$ y $\vec{w} = (0,-1)$. Calcula:
a) $-\vec{u} + 3\vec{v}$ b) $\vec{w} - \vec{u} - 2\vec{v}$ c) $\vec{u} - (2\vec{w} + \vec{v})$

Solución:

a) $-\vec{u} + 3\vec{v} = -(-1,0) + 3(1,2) = (1,0) + (3,6) = (4,6)$

b) $\vec{w} - \vec{u} - 2\vec{v} = (0,-1) - (-1,0) - 2(1,2) = (-1,-5)$

c) $\vec{u} - (2\vec{w} + \vec{v}) = (-1,0) - [2(0,-1) + (1,2)] = (-1,0) - [2(0,-1) + (1,2)] =$
$= (-1,0) - (1,0) = (-2,0)$

2. Halla los vectores definidos por cada una de las siguientes parejas de puntos:

a) A(–1, 2) y B(2, –3) b) C(2, –2) y D(–1, –3) c) $E\left(\frac{1}{2},1\right)$ y $F\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right)$

Solución:

En general, las coordenadas de un vector que tiene su origen en $P(p_1,p_2)$ y extremo en $Q(q_1,q_2)$ vienen dadas por:
$\overrightarrow{PQ}=(p_2-p_1,q_2-q_1)$.

Entonces:

a) $\overrightarrow{AB}=(2+1,-1-2)=(3,-3)$

b) $\overrightarrow{CD}=(-1+2,-3-2)=(1,-5)$

c) $\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2},\frac{1}{5}+1\right)=\left(-\frac{7}{6},\frac{6}{5}\right)$

Nota:
Consideramos que A, C y E son orígenes, mientras que B, D y F son extremos.

3. Sean los vectores: $\vec{u}=(-1,2)$, $\vec{v}=(-3,0)$ y $\vec{w}=(-5,-1)$. Calcula los siguientes productos escalares:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ b) $\vec{w}\cdot\vec{u}$ c) $2\cdot(\vec{w}\cdot\vec{v})$

Solución:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,2)\cdot(3,0)=-1\cdot3+2\cdot0=-3$

b) $\vec{w}\cdot\vec{u}=(-5,-1)\cdot(-1,2)=(-5)(-1)+(-1)2=5-2=3$

c) $2\cdot(\vec{w}\cdot\vec{v})=2\cdot(-5,-1)\cdot(-3,0)=2\cdot(-5)(-3)+(-1)\cdot0=30$

B.2. Módulo y argumento de un vector

4. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

a) $\vec{u}=(-3,2)$ b) $\vec{v}(4,-5)$ c) $\vec{w}(-4,-2)$

Solución:

- El módulo de un vector cualquiera, $\vec{r}$, expresado mediante sus coordenadas, $\vec{r}=(a,b)$, viene dado por:

$|\vec{r}|=\sqrt{a^2+b^2}$ y el argumento de $\vec{u}=(a,b)$, que denotamos por α, es $\alpha=\operatorname{artg}\dfrac{b}{a}$

Así:

a) $\vec{u}=(-3,2)\Rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$ unidades.

b) $\vec{v}=(4,-5)\Rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{4^2+(-5)^2}=\sqrt{41}$ unidades.

c) $\vec{w}=(-4,-2)\Rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$ unidades.

5. Halla el módulo y el argumento de un vector $\vec{u}$ que tiene por origen el punto O(2,3) y por extremo el punto P(4,5).

Solución:

- El vector $\vec{u}$, conocidos sus extremos es: $\vec{u}(4-2,5-3)=\vec{u}(2,2)$
- El módulo de $\vec{u}(a,b)$ es: $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{8}$
- El argumento de $\vec{u}=(a,b)$, que denotamos por α, es:

$$\alpha=\operatorname{artg}\frac{b}{a}\Rightarrow\alpha=\operatorname{artg}1\Rightarrow\alpha=45^{o}$$

6. Halla la distancia entre los puntos A(0,3) y B(4,-1) .

Solución:

La distancia entre dos puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ viene dada por: $d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

En nuestro caso: $d(A,B)=\sqrt{(4-0)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$

B.3. Posiciones relativas entre vectores

7. Halla un vector normal para cada uno de los siguientes vectores:

a) $\vec{u}_1=(-1,2)$ b) $\vec{u}_2=(1,-2)$ c) $\vec{u}_1=\left(-\dfrac{1}{2},-5\right)$

Solución:

a) Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero. Así, un vector $\vec{p}=(x,y)$ perpendicular a $\vec{u}_1$ cumplirá $\vec{u}_1\cdot\vec{p}=0$:

$\vec{u}_1 \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow (-1,2)\cdot(x,y) = 0 \Rightarrow -x + 2y = 0$

Pero hay infinitos valores de x e y que verifican esto. Si hacemos que x=2, por ejemplo, un vector perpendicular a $\vec{u}_1$ nos dará:

$-2 + 2y = 0 \Rightarrow y = 1$, por lo que $\vec{p} = (x,y) \Rightarrow \vec{p} = (2,1)$.

b) $\vec{u}_2 \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow (1,-2)\cdot(x,y) = 0 \Rightarrow x - 2y = 0$. Si suponemos que x=1, por ejemplo, entonces: $x - 2y = 0 \Rightarrow 1 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

Un vector perpendicular al dado es, por lo tanto, $\vec{p} = \left(2, \frac{1}{2}\right)$

c) $\vec{u}_3 \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -5\right)\cdot(x,y) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x - 5y = 0$.

Vamos a suponer que $y = -\frac{1}{5}$. En ese caso, x valdrá lo siguiente:

$-\frac{1}{2}x - 5y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x - 5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Rightarrow x = 2$

Así que $\vec{p} = \left(2, -\frac{1}{5}\right)$

8. Halla un vector perpendicular a $\vec{u} = (-3,2)$ y con su mismo módulo.

Solución:

Un vector $\vec{v} = (a,b)$ que sea perpendicular a $\vec{u}$ cumplirá que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, es decir: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow (-3,2)(a,b) = 0 \Rightarrow -3a + 2b = 0$

El módulo de $\vec{u}$ está dado por: $|\vec{u}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Entonces: $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13} \Rightarrow a^2 + b^2 = 13$

Estas dos ecuaciones forman un sistema. Resolviéndolo obtenemos las coordenadas del vector buscado:

$$\left.\begin{array}{l} -3a + 2b = 0 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow (a,b) = \begin{cases} (2,3) \\ (-2,-3) \end{cases}$$

(Observamos que hay dos vectores distintos que verifican las condiciones del enunciado)

9. Halla un vector paralelo a $\vec{v}=(1,2)$, con sentido contrario y con un módulo igual al del vector $\vec{w}=(0,-1)$.

Solución:

Un vector $\vec{u}=(a,b)$ que sea paralelo a $\vec{v}$ cumplirá que $\vec{u}\cdot\vec{v}=k$, es decir: $\vec{v}\cdot\vec{u}=1\Rightarrow(1,2)(a,b)=1$

Si $\vec{u}$ tiene sentido contrario a $\vec{v}$ entonces será $\vec{u}=(-a,-b)$:
Por ello $(1,2)(-a,-b)=1\Rightarrow a+2b=-1$

El módulo de $\vec{w}$ está dado por $|\vec{w}|=\sqrt{0^2+1^2}=0$ y como $|\vec{w}|=|\vec{u}|$, entonces se puede escribir que: $|\vec{u}|=a^2+b^2=1$

Tenemos entonces un sistema de ecuaciones que nos dará el vector buscado:

$$\left.\begin{array}{l} a+2b=-1 \\ a^2+b^2=1 \end{array}\right\}\Rightarrow(a,b)=\begin{cases}(-1,0)\\ \left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)\end{cases}$$

(Vemos que hay dos vectores que satisfacen las condiciones del enunciado)

10. Determina el ángulo que forman los vectores $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(1,-2)$

Solución:

El ángulo formado por dos vectores viene dado por: $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$, esto es: $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{(-2,1)\cdot(1,3)}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{1+9}}=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=\arccos\left(\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\right)$

B.4. Ecuación de una recta dados dos puntos. Alineación de puntos

11. Calcula cada una de las tres ecuaciones de una recta, escrita en forma general, y=mx+n, que pasan por cada una de las siguientes parejas de puntos:

a) A(–1, 2) y B(2, –3) b) A(–3, 2) y B(4, –5) c) $A\left(\frac{1}{2},1\right)$ y $B\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right)$

<u>Solución</u>:

Recordamos que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ está dada por: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

d) Para A(–1, 2) y B(2, –3):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{-3-2}\Rightarrow\frac{x+1}{3}=\frac{2-y}{5}\Rightarrow y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$$

e) Para A(–3, 2) y B(4, –5):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow\frac{x+3}{4+3}=\frac{y-2}{-5-2}\Rightarrow\frac{x+3}{7}=\frac{2-y}{7}\Rightarrow y=-x-1$$

f) Para $A\left(\frac{1}{2},1\right)$ y $B\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow\frac{x-\frac{1}{2}}{-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{\frac{1}{5}-1}\Rightarrow\frac{x+3}{7}=\frac{2-y}{7}\Rightarrow y=\frac{48}{35}x+\frac{11}{35}$$

12. Calcula la coordenada **x** que tiene que tener el punto B, $B(x_2,4)$, para que los puntos $A(1,1)$, $B(x_2,-4)$ y $C(0,6)$ estén alineados.

<u>Solución</u>:

Para que tres puntos $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ y $C(x_3,y_3)$ estén alineados, han de verificar la siguiente ecuación: $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_2}$

Entonces, en nuestro caso: $\frac{x_2-1}{0-x_2}=\frac{-4-1}{6+4}\Rightarrow\frac{x_2-1}{-x_2}=\frac{-1}{2}\Rightarrow x_2=4$

B.5. Ecuaciones de la recta

13. Expresa la ecuación de una recta que pasa por P(5,2) y tiene como vector director a $\vec{u}(-4,2)$ en las formas vectorial, paramétrica, continua, general, explícita y punto-pendiente.

Solución:

a) Ecuación vectorial:

Viene dada por $\vec{r} = P + \lambda\vec{u} \Rightarrow (x,y) = (a,b) + \lambda(u_1, u_2)$.
Simplemente hay que sustituir los datos en la expresión: $(x,y) = (5,2) + \lambda(-4,2)$

b) Ecuaciones paramétricas:

Vienen dada por: $\left.\begin{array}{l} x = a + \lambda u_1 \\ y = b + \lambda u_2 \end{array}\right\}$.

Sustituimos los datos en la expresión: $\left.\begin{array}{l} x = 5 - 4\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{array}\right\}$

c) Ecuación continua:

La ecuación continua está dada por $\dfrac{x-a}{u_1} = \dfrac{y-b}{u_2}$

Sustituimos en ella los datos dados: $\dfrac{x-5}{-4} = \dfrac{y-2}{2}$

d) Ecuación general:

La ecuación general está dada por: $Ax + By + C = 0$. Podemos obtenerla reescribiendo la ecuación continua:

$$\frac{x-5}{-4} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow 2x - 10 = -4y + 8 \Rightarrow 2x + 4y - 18 = 0$$

e) Ecuación explícita:

La ecuación explícita es de la forma $y = ax + b$. La podemos obtener a partir de la ecuación general reescribiéndola:

$$2x + 4y - 18 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 9$$

f) Forma punto-pendiente:

Esta forma de escribir la ecuación de la recta es así: $y - b = m(x - a)$

Sustituimos en la expresión los datos conocidos: $y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 5)$

B.6. Posición relativa entre rectas

14. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2,1) y es paralela a la recta **r**: y=2x+1. Luego halla la ecuación de la recta **t** que pasando por el mismo punto es perpendicular a **r**.

Solución:

- Caso $r \parallel s$

  En este caso, las dos rectas tienen la misma pendiente: $m_s = m_r = 2$

  Obtenemos la recta en la forma punto-pendiente:

  $y - y_p = m\left(x - x_p\right) \Rightarrow y - 2 = 2 \cdot (x - 1)$

- Caso $r \perp s$

  En este caso, la pendiente de la recta s está dada por: $m_s = \dfrac{-1}{m_r} = -\dfrac{1}{2}$

  Obtenemos la recta en la forma punto-pendiente:

  $y - y_p = m\left(x - x_p\right) \Rightarrow y - 2 = -\dfrac{1}{2} \cdot (x - 1)$

B.7. Ecuación de una circunferencia

15. Halla la ecuación de una circunferencia de origen $O(1,3)$ y radio 5 unidades.

Solución:

La ecuación de una recta de origen $O(a,b)$ y radio r está dada por:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Sustituimos datos en esa expresión:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

Por último, ordenamos los términos:

$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$

16. Calcula el radio y el origen de una circunferencia que tiene la siguiente ecuación $x^2+y^2-2x-6y-15=0$.

Solución:

Tenemos que saber que una circunferencia que tiene por ecuación general a $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ su centro y su radio están dados respectivamente por:

c) $O\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.

d) $r=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$.

En nuestro caso, los datos dados son: $A=-2;\ B=-6;\ C=-15$

Sustituyendo los datos en las expresiones para el centro y el radio, obtenemos lo siguiente:

a) El centro: $O\left(-\frac{(-2)}{2},-\frac{(-6)}{2}\right)=O(1,3)$

b) El radio: $r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-6)^2-4(-15)}=\frac{10}{2}=5$