

EXAMEN RESUELTO DE INECUACIONES

1. $2x^3 - x^2 - 2x + 1 \leq 0$

Solución:

- Descomponemos factorialmente el polinomio $2x^3 - x^2 - 2x + 1$, usando Ruffini. Probamos con ± 1 .

1	2	-1	-2	1	$\Rightarrow (x-1)(x+1)(2x-1)$
-1	2	1	-1	0	
-1	2	-2	1	0	
2	-1	-2	1	-1	

Así que la inecuación se puede escribir de un modo más conveniente para su resolución como sigue:

$$(x-1)(x+1)(2x-1) \leq 0$$

- Ahora discutimos el signo de cada factor para cada una de las cuatro regiones que determinan las raíces de $(x-1)(x+1)(2x-1) = 0$, que son $x = -1$, $x = 1$ y $x = \frac{1}{2}$

Zona 1: los valores menores que -1 ; **zona 2:** los valores comprendidos entre -1 y $\frac{1}{2}$; **zona 3:** los valores comprendidos entre $\frac{1}{2}$ y 1 ; **zona 4:** los valores mayores que 1 .

Veamos en cuáles de estas 4 zonas se satisface la inecuación:

	zona 1 Entre $-\infty$ y -1	zona 2 Entre -1 y $\frac{1}{2}$	zona 3 Entre $\frac{1}{2}$ y 1	zona 4 Entre 1 y ∞
$(x-1)$	-	-	-	+
$(2x-1)$	-	-	+	+
$(x+1)$	-	+	+	+
$(x-1)(x+1)(2x-1)$	-	+	-	+

La inecuación se satisface para las zonas 1 y 4. Podemos comprobar que los puntos -1 , 1 y $\frac{1}{2}$ verifican también la inecuación, ya que al sustituirlos en ésta obtenemos en los tres casos $0 = 0$.

Conclusión:

La solución de $(x-1)(x+1)(2x-1) \leq 0$ es: $x \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

2.
$$\left. \begin{aligned} \frac{2x-2}{5} + \frac{5-2x}{3} &< 1 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{2x-3}{4} &> \frac{3}{4} \end{aligned} \right\}$$

Solución:

- Se resuelve cada una de las inecuaciones lineales. El resultado final es la intersección de ambas soluciones:

a.1 $\frac{2x-2}{5} + \frac{5-2x}{3} < 1 \Rightarrow 6x-6+25-10x < 15 \Rightarrow -4x < -4 \Rightarrow 4x > 4 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in (1, \infty)$

a.2 $\frac{x+2}{3} - \frac{2x-3}{4} > \frac{3}{4} \Rightarrow 4x+8-6x+9 > 9 \Rightarrow -2x > -8 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow x \in (-\infty, 4)$

Conclusión:

$x \in (-\infty, 4) \cap (1, \infty) \Rightarrow x \in (1, 4)$

3. $\frac{x^2-1}{x^2-4} \leq 0$

Solución:

- Factorizamos el numerador y el denominador para resolver más cómodamente la inecuación:

$\frac{x^2-1}{x^2-4} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-2)} \leq 0$

- Esta inecuación racional se satisface de simultáneamente de dos formas:

a.1 Cuando el numerador es positivo o cero y el denominador negativo:

$$\left. \begin{aligned} (x+1)(x-1) &\geq 0 \\ (x+2)(x-2) &< 0 \end{aligned} \right\}$$

- Solución para $(x+1)(x-1) \geq 0$:

	zona 1 Entre $-\infty$ y -1	zona 2 Entre -1 y 1	zona 3 Entre 1 y ∞
$(x+1)$	-	+	+
$(x-1)$	-	-	+
$(x+1) \cdot (x-1)$	+	-	+

Los puntos 1 y -1 satisfacen la inecuación. La solución de $(x+1)(x-1) \geq 0$ es $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

- Solución para $(x+2)(x-2) < 0$:

	zona 1 Entre $-\infty$ y -2	zona 2 Entre -2 y 2	zona 3 Entre 2 y ∞
$(x+2)$	-	+	+
$(x-2)$	-	-	+
$(x+2) \cdot (x-2)$	+	-	+

Los puntos 2 y -2 no satisfacen la inecuación. La solución de $(x+2)(x-2) < 0$ es $x \in (-2, 2)$

- La solución de este primer sistema es la intersección de la solución de ambas ecuaciones:

$x_1 \in \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\} \cap (-2, 2) \Rightarrow x_1 \in (-2, 1] \cup [1, 2)$

a.2 Cuando el numerador es negativo o cero y el denominador positivo.

$$\left. \begin{aligned} (x+1)(x-1) &\leq 0 \\ (x+2)(x-2) &> 0 \end{aligned} \right\}$$

- Solución para $(x+1)(x-1) \leq 0$:

	zona 1	zona 2	zona 3
	Entre $-\infty$ y -1	Entre -1 y 1	Entre 1 y ∞
$(x+1)$	-	+	+
$(x-1)$	-	-	+
$(x+1) \cdot (x-1)$	+	-	+

Los puntos 1 y -1 satisfacen la inecuación. La solución de $(x+1)(x-1) \leq 0$ es $x \in [-1, 1]$

- Solución para $(x+2)(x-2) > 0$:

	zona 1	zona 2	zona 3
	Entre $-\infty$ y -2	Entre -2 y 2	Entre 2 y ∞
$(x+2)$	-	+	+
$(x-2)$	-	-	+
$(x+2) \cdot (x-2)$	+	-	+

Los puntos 2 y -2 no satisfacen la inecuación. La solución de $(x+2)(x-2) > 0$ es $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

- La solución de este segundo sistema es la intersección de la solución de ambas ecuaciones:

$$x_2 \in \{(-\infty, -2) \cup (2, \infty)\} \cap [-1, 1] \Rightarrow x_2 \in \emptyset$$

Conclusión final:

La solución de $\frac{x^2-1}{x^2-4} \leq 0$ viene dada por la unión de las soluciones de los sistemas que hemos estado discutiendo:

$$x = x_1 \cup x_2 \Rightarrow \boxed{x \in (-2, 1] \cup [1, 2]}$$

4. $\left. \begin{array}{l} |1-2x| < 4 \\ x(1-x) \leq -2 \end{array} \right\}$

Solución:

▪ Se resuelve cada una de las inecuaciones lineales. El resultado final es la intersección de ambas soluciones:

a.1 $\left. \begin{array}{l} |1-2x| < 4 \Rightarrow \begin{cases} 1-2x < 4 \\ -(1-2x) < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x < \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

a.2 $x(1-x) \leq -2 \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$

▪ Descomponemos factorialmente el polinomio $x^2 - x - 2$ y para ello resolvemos la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Entonces, la inecuación se puede escribir también así: $(x-2) \cdot (x+1) \geq 0$

▪ Ahora discutimos el signo de cada factor para cada una de las tres regiones que determinan los puntos -1 y 2 . Serán solución los intervalos que satisfacen la inecuación.

Zona 1: los valores menores que -1 , **zona 2:** los valores comprendidos entre -1 y 2 y **zona 3:** los valores mayores que 2 .

Veamos en cuáles de estas tres zonas se satisface la inecuación:

	zona 1	zona 2	zona 3
	Entre $-\infty$ y -1	Entre -1 y 2	Entre 2 y ∞
$(x-2)$	-	-	+
$(x+1)$	-	+	+
$(x-2) \cdot (x+1)$	+	-	+

La inecuación se satisface para las zonas 1 y 3. Podemos comprobar también que los puntos -1 y 2 verifican la inecuación, ya que al sustituirlos en ésta obtenemos en ambos casos $0 \geq 0$. Así que $x_2 \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$

Conclusión:

La solución final es $x_1 \cap x_2$, es decir $x \in \left(-\frac{3}{5}, 1\right] \cup \left[2, \frac{5}{2}\right)$

$$5. \begin{cases} x-y > 0 \\ 3x-y < 4 \\ x+y > 0 \end{cases}$$

Solución:

- Se representan gráficamente, en el mismo plano, las ecuaciones $x-y=0$, $3x-y=4$ y $x+y=0$, **prestando especial atención a si los puntos de cada una de las rectas forman parte o no de la solución**. En nuestro caso, los puntos de todas las rectas no forman parte de la solución, ya que en ellas no aparece el signo "=". Esto se representa mediante trazos discontinuos.

Se puede comprobar que sólo la región interior determinada por el sistema. Ésta región es la solución que buscamos.


