

1. Calcula el dominio de $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$

Solución:

- El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. f(x) existe para todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ excepto:

a) Los que hacen que el radicando sea negativo, es decir: $\frac{x-3}{x+2} < 0$

- Resolución de $\frac{x-3}{x+2} < 0$

- La inecuación dada se verifica siempre que el numerador y el denominador tienen signos distintos. Ello se verifica de dos modos distintos:

$$\begin{cases} x-3 < 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow x_1 \in (-2, 3)$$

$$\begin{cases} x-3 > 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow x_2 \notin \mathbb{R}$$

- La solución de la inecuación es la unión de x_1 y x_2 , es decir, $x \in (-2, 3)$

b) Los que hacen que el denominador se anule: $x+2=0$, es decir, $x=-2$

- Después del análisis anterior, podemos afirmar que el Dom(f) está dado por:

$$\text{Dom}(f) = x \in \mathbb{R} - [-2, 3)$$

2. Sean $f(x) = \sqrt{x^2-3}$ y $g(x) = \frac{x^2+2}{3}$. Halla $(g \circ f)(x) = 0$

Solución:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{(\sqrt{x^2-3})^2 + 2}{3} = \frac{x^2-1}{3}$$

$$(g \circ f)(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{3} = 0 \Rightarrow x^2-1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

3. Halla la recíproca de la función $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$

Solución:

$$y = \frac{x-3}{x+2} \Rightarrow y(x+2) = x-3 \Rightarrow yx-x = -2y-3 \Rightarrow x(y-1) = -2y-3 \Rightarrow x = \frac{2y+3}{1-y}$$

Ahora hacemos el cambio de variables $x \equiv (f^{-1})(x)$, $y \equiv x$. Por lo tanto:

$$(f^{-1})(x) = \frac{2x+3}{1-x}$$

4. Estudia la simetría de $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Solución:

- Simetría par: $f(x) = f(-x)$

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow \frac{x^2}{x-1} \neq \frac{x^2}{-x-1}, \text{ es decir, no existe la simetría par.}$$

- Simetría impar: $-f(x) = f(-x)$

$$-f(x) = f(-x) \Rightarrow -\frac{x^2}{x-1} \neq \frac{x^2}{-x-1}, \text{ es decir, no existe la simetría impar.}$$

- Conclusión:

La función no es simétrica.

5. Representa la función $f(x) = x^2 - 3x - 4$ después de haber hallado los puntos de corte, el vértice y estudiado la concavidad.

Solución:

▪ **Los puntos de corte con el eje x:**

Se obtienen a partir de la condición $y=0$. En ese caso:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

▪ **El punto de corte con el eje y:**

Está dado por la condición $x = 0$. En nuestro caso, cuando $x = 0$ se tiene que $y = -4$

▪ **Las coordenadas del vértice:**

Están dadas por $x_v = -\frac{b}{2a}$; $y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Entonces:

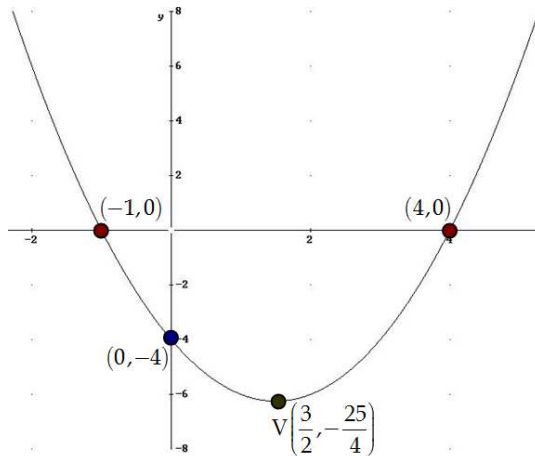
$$x = -\frac{(-3)}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}; y = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{25}{4} \Rightarrow V\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$$

▪ **Orientación de la parábola:**

Como $a < 0$, entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

▪ **Representación gráfica:**

Llevamos al plano cartesiano los puntos que hemos conseguido y los unimos.



6. Representa $f(x) = \frac{-4x+6}{x-3}$.

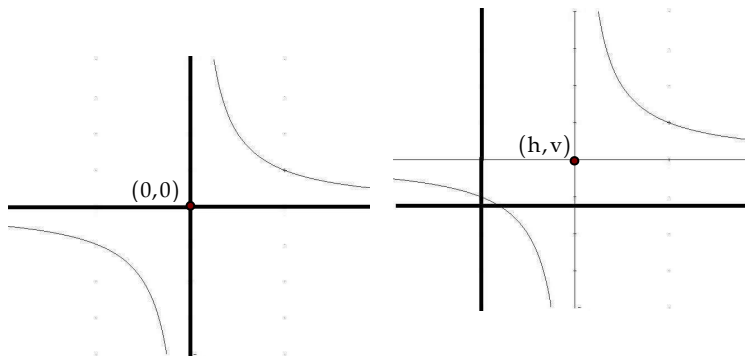
Solución:

La función dada es una función hiperbólica del tipo $f(x) = \frac{k}{x-h} + v$, con centro en (h, v) un poco encubierta.

Escribamos $f(x) = \frac{-4x+6}{x-3}$ en la forma $f(x) = \frac{k}{x-h} + v$:

$$\left. \begin{array}{l} -4x+6 \\ \frac{4x-12}{-6} \end{array} \right\} \frac{x-3}{-4} \Rightarrow \frac{-6}{x-3} - 4, \text{ la cual indica que el origen es } (-3, -4)$$

Debemos recordar que una función $f(x) = \frac{k}{x-h} + v$ tiene la misma gráfica que $f(x) = \frac{k}{x}$, pero desplazado su centro de $(0, 0)$ a (h, v) .



En nuestro caso, el origen está en $(-3, -4)$, como hemos visto antes.

- **Puntos de corte con el eje X:**

La condición es $y=0$, es decir, $\frac{-4x+6}{x-3}=0 \Rightarrow x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}, 0\right)$

- **Puntos de corte con el eje Y:**

La condición es $x=0$, es decir, $y=\frac{-4 \cdot 0+6}{0-3}=-2 \Rightarrow (0, -2)$

- **Tabla de valores:**

Podemos construir una pequeña tabla de valores para afinar un poco más la gráfica:

x	y
$\frac{5}{2}$	8
$\frac{7}{2}$	-16
4	$-\frac{22}{7}$
6	-7

