

EXAMEN RESUELTO DE INTERPOLACIÓN

1. De una función se conocen los siguiente valores: $f(0)=2$, $f(1)=0$ y $f(2)=3$. Determina el polinomio que interpola estos puntos utilizando el polinomio de Lagrange.

Solución:

- Los puntos por los que tiene que pasar el polinomio interpolador son: $A(0,2)$, $B(1,0)$ y $C(2,3)$, por lo que el polinomio de Lagrange será:

$P(x) = P_A(x) + P_B(x) + P_C(x)$, en donde $P_A(x)$, $P_B(x)$ y $P_C(x)$ están dados por:

$$P_A(x) = \frac{(x-x_B)(x-x_C)}{(x_A-x_B)(x_A-x_C)} \cdot y_A = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \cdot 2 = \frac{(x^2-3x+2) \cdot 2}{2} = x^2 - 3x + 2$$

$$P_B(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \cdot 0 = 0$$

$$P_C(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \cdot 3 = \frac{3}{2}(x^2 - x)$$

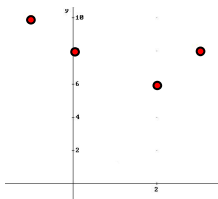
Así que:

$$P(x) = x^2 - 3x + 2 + \frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{2} \Rightarrow P(x) = \frac{5x^2}{2} - \frac{9x}{2} + 2$$

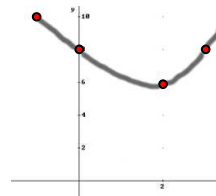
2. ¿Es posible que exista una función de interpolación cuadrática que pase por los puntos $(2,6)$, $(0,8)$, $(3,8)$ y $(-1, 10)$?

Solución:

- Representamos los puntos en el plano cartesiano.



- Observamos que es posible trazar una curva parabólica o cuadrática que una a todos. Ello quiere decir que sí es posible que exista una función de interpolación cuadrática que pase por esos puntos.



3. Halla el polinomio de interpolación cuadrática correspondiente a los datos de la tabla y completa la tabla:

x	-1	0	1	2	3
y	9		1		17

Solución:

- Vamos a construir el polinomio interpolador cuadrático de los puntos $A(-1,9)$, $B(1,1)$ y $C(3,17)$, el cual está dado por la función $y(x) = ax^2 + bx + c$. Los coeficientes a , b y c los obtenemos resolviendo el sistema siguiente:

$$\left. \begin{aligned} y_A(x) &= ax_A^2 + bx_A + c \\ y_B(x) &= ax_B^2 + bx_B + c \\ y_C(x) &= ax_C^2 + bx_C + c \end{aligned} \right\}$$

- Sustituyendo en él los tres puntos dados obtenemos:

$$\begin{cases} 9 = a(-1)^2 + b(-1) + c \\ 1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 17 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = -a - b + c \\ 1 = a + b + c \\ 17 = 9a + 3b + c \end{cases} \Rightarrow (a, b, c) = (4, -8, 5)$$

- Así que el polinomio interpolador buscado es: $y(x) = 4x^2 - 8x + 5$
- Por otro lado, necesitamos calcular el valor de y cuando $x=0$ y $x=2$. Para ello usamos el polinomio interpolador que acabamos de hallar:

$$y(0) = 4 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 5 = 5 ; \quad y(2) = 4 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 5 = 5$$

4. Sea la función $f(x) = x^2$, y sea $P(x)$ el polinomio interpolador que coincide con la función $f(x)$ en las coordenadas $x=2$ y $x=5$. Halla la expresión de $P(x)$.

Solución:

- $P(x)$ lo vamos a construir usando dos puntos, que los vamos a llamar A y B. De esos dos puntos en principio sólo conocemos las coordenadas pertenecientes a x . Las coordenadas de y las obtenemos sustituyendo $x=2$ y $x=5$ en $f(x)$:

$$f(2) = 4 ; \quad f(5) = 25 , \text{ por lo que los puntos son: } A(2,4) \text{ y } B(5,25) .$$

- El polinomio interpolador que pasa por estos dos puntos viene dado por: $y(x) - y_B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_B)$. Sustituyendo datos en él:

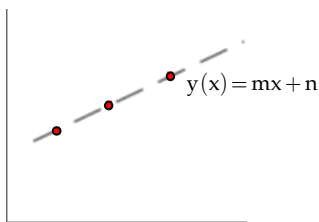
$$y(x) - 25 = \frac{25 - 4}{5 - 2} (x - 5) \Rightarrow y(x) = 7(x - 5) + 25 \Rightarrow y(x) = 7x - 10$$

5. Responde adecuadamente a cada una de las siguientes cuestiones

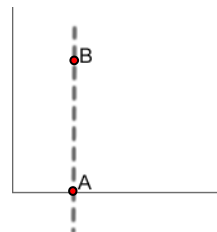
- ¿Puede ocurrir que cuando calculamos un polinomio interpolador que pasa por tres puntos, obtengamos la ecuación de una recta? ¿Por qué? Pon un ejemplo.
- ¿Ser puede calcular el polinomio interpolador que pasa por los puntos A(2,0) y B(2,5)? ¿Por qué?
- Pon un ejemplo de de cuatro puntos tales que al tratar de obtener un polinomio interpolador éste sea de segundo grado.

Solución:

- Si. Ello ocurre cuando los tres puntos pertenecen a una misma línea recta, como se muestra en la figura.



- El polinomio interpolador que pasa por A y B se obtendría sustituyendo las coordenadas de cada punto en la expresión $y(x) - y_B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_B)$. Pero al hacerlo obtendríamos que $y(x) = \frac{5}{0} (x - 2)$, es decir, $y(x) = \infty (x - 2)$. Por ello, no es posible calcular el polinomio interpolador.



- Los cuatro puntos han de ser tales que estén contenidos en una curva parabólica

