

EJERCICIOS RESUELTOS DE POLINOMIOS

1. Haz las siguientes multiplicaciones polinómicas:

$$a) (x + \sqrt{27})^2 = x^2 + 2\sqrt{27}x + 27 = x^2 + 6\sqrt{3}x + 27$$

$$b) (\sqrt{31}x - 5)^2 = 31x^2 - 10\sqrt{31}x + 25$$

$$c) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right) = \frac{x^2}{3} - 3$$

$$d) (x - \sqrt{2}) \cdot (x + 2\sqrt{2}) = x(x + 2\sqrt{2}) - \sqrt{2}(x + 2\sqrt{2}) = x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}x - 2 = x^2 + \sqrt{2}x - 2$$

$$e) (3x^2 - \sqrt{3})^2 = (3x^2)^2 - 2 \cdot 3x^2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 9x^4 - 6\sqrt{3}x^2 + 3$$

$$f) (2x^4 + \sqrt{5})^3 = (2x^4)^3 + 3 \cdot (2x^4)^2 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot (2x^4) \cdot (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3 = 8x^{12} + 12 \cdot \sqrt{5}x^8 + 30x^4 + (\sqrt{5})^3$$

2. Simplifica las siguientes fracciones polinómicas:

$$a) \frac{3x-5}{18x-30} = \frac{3x-5}{6 \cdot 3x - 6 \cdot 5} = \frac{(\cancel{3x-5}) \cdot 1}{6 \cdot (\cancel{3x-5})} = \frac{1}{6}$$

$$b) \frac{6x^2}{3x^2-3x} = \frac{3x \cdot 2x}{3x(x-1)} = \frac{2x}{x-1}$$

$$c) \frac{5x+15}{25x+75} = \frac{5x+15}{5 \cdot 5x + 5 \cdot 15} = \frac{(5x+15) \cdot 1}{5 \cdot (5x+15)} = \frac{1}{5}$$

$$d) \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$e) \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \frac{(\cancel{x-1})(x-3)}{(x+1)(\cancel{x-1})} = \frac{x-3}{x+1}$$

$$f) \frac{3x^2y - xy}{9xy - 3y} = \frac{xy(x-3)}{3y(x-3)} = \frac{x}{3}$$

$$g) \frac{a^2b - ab^2}{a^3b^2 - a^2b^3} = \frac{ab(a-b)}{a^2b^2(a-b)} = \frac{ab}{a^2b^2} = \frac{1}{ab}$$

3. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^2 - x - 6$

Solución:

Podemos factorizar el polinomio dado hallando las raíces de $x^2 - x - 6 = 0$:

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

En ese caso, $P(x) = x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$

Nota:

Hubiésemos obtenido el mismo resultado descomponiendo el polinomio mediante el método de Ruffini.

b) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$

Solución:

Para descomponer $P(x)$ vamos a utilizar el método de Ruffini:

Las raíces enteras de $P(x)$ van a estar entre los siguientes números, todos divisores de 2, es decir: ± 1 y ± 2 . Probamos con 1 y con 2:

	1	-5	9	-7	2
1		1	-4	5	-2
	1	-4	5	-2	0
1		1	-3	2	
	1	-3	2	0	
1		1	-2		
	1	-2	0		

Conclusión:

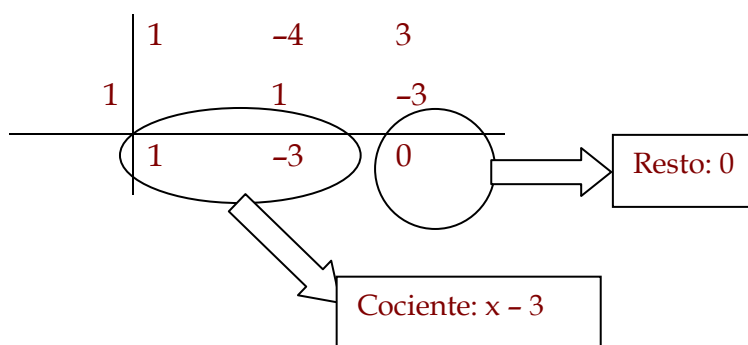
$$P(x) = (x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 2) = (x - 1)^3(x - 2)$$

4. Haz las siguientes divisiones entre polinomios:

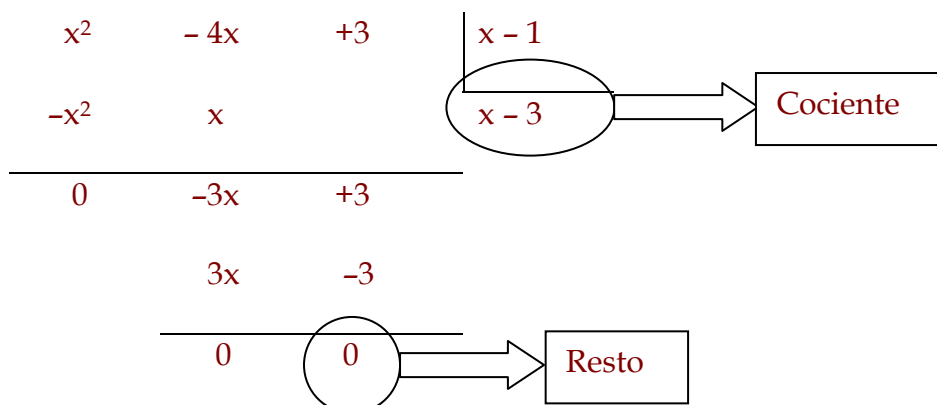
a) $(x^2 - 4x + 3) : (x - 1)$

Solución:

a) Método de Ruffini



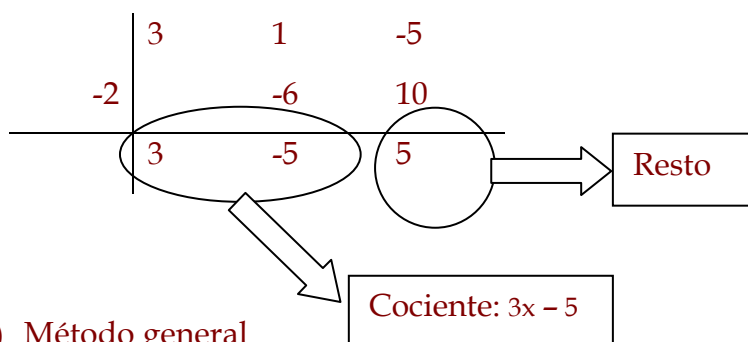
b) Método general o estándar



b) $(3x^2 + 1 - 5) : (x + 2)$

Solución:

a) Método de Ruffini



b) Método general

$$\begin{array}{r}
 3x^2 + x - 5 \\
 -3x^2 - 6x \\
 \hline
 0 - 5x - 5 \\
 5x \quad 10 \\
 \hline
 0 \quad 5
 \end{array}$$

$x + 2$
 $3x - 5$ → **Cociente**
 5 → **Resto**

5. Opera y simplifica las siguientes fracciones polinómicas.

a) $\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x}{(x - 1)^2}$

b) $\frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{x - 1}{(x - 1)^2} + \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{x + 2}{x - 1}$

c) $\frac{1 - x}{x^2 - 2x + 1} + \frac{x}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} = -\frac{x - 1}{(x - 1)^2} + \frac{x}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} =$
 $= -\frac{1}{x - 1} + \frac{x}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{x - 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} =$
 $= \frac{x^2 - 1 - x^2 + 2x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{2(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{2}{x + 1}$

d) $\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{x}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} =$
 $= \frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{x}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{x}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} =$
 $= \frac{x + 1}{(x - 1)^2(x + 1)} + \frac{x(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2(x + 1)} - \frac{x(x - 1)^2}{(x - 1)^2(x + 1)} =$
 $= \frac{x + 1 + x(x - 1)(x + 1) - x(x - 1)^2}{(x - 1)^2(x + 1)} =$
 $= \frac{x + 1 + x(x^2 - 1) - x(x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)^2(x + 1)} = \frac{x + 1 + x^3 - x - x^3 + 2x^2 - x}{(x - 1)^2(x + 1)} =$
 $= \frac{2x^2 - x + 1}{(x - 1)^2(x + 1)}$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \frac{\frac{a^2-1}{\frac{a^2+2a+1}{a-1}} - \frac{2-2a}{a+1}}{\frac{1}{a-1}} &= \frac{\frac{\cancel{(a+1)}(a-1)}{(a+1)^2} - \frac{2-2a}{a+1}}{\frac{1}{a-1}} = \frac{\frac{(a-1)^2}{(a+1)} - \frac{2-2a}{a+1}}{\frac{1}{a-1}} = \\
 &= \frac{\frac{a^2-2a+1}{a+1} - \frac{2-2a}{a+1}}{\frac{1}{a-1}} = \frac{a^2-2a+1-2+2a}{a+1} = \frac{a^2-1}{a+1} = \frac{\cancel{(a+1)}(a-1)}{\cancel{a+1}} = a-1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \left(\frac{x-1}{x^3-2x^2-x+2} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x^2-x-2} \right) \cdot \left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{1-x}{x-1} \right) &= \\
 &= \left(\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)(x-2)} + \frac{1}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{(x+1)(x-2)} \right) \cdot \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}} \right) = \\
 &= \left(\frac{1}{(x+1)(x-2)} + \frac{1}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{(x+1)(x-2)} \right) \cdot \left(\frac{x+1}{x-1} - 1 \right) = \\
 &= \left(\frac{-1}{(x+1)(x-2)} + \frac{1}{(x+1)(x-1)} \right) \cdot \left(\frac{x+1-x+1}{x-1} \right) = \\
 &= \left(\frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)} + \frac{(x-2)}{(x+1)(x-1)(x-2)} \right) \cdot \left(\frac{2}{x-1} \right) = \\
 &= \left(\frac{-x+1+x-2}{(x+1)(x-1)(x-2)} \right) \cdot \left(\frac{2}{x-1} \right) = \frac{-2}{(x+1)(x-2)(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

6. Aplicaciones del Teorema del Resto

- a) Dado el polinomio $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 1$ calcula el resto que resulta al dividir entre $Q(x) = x + 1$, $S(x) = x - 1$.

Solución:

- a.1 Por el teorema del resto, para $Q(x)$ se tiene que cumplir que $P(-1) = R$, es decir:

$$P(-1) = R \Rightarrow 3(-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 1 = R \Rightarrow R = -1$$

- a.2 Por el teorema del resto, para $S(x)$ se tiene que cumplir que $P(1) = R$, es decir:

$$P(1) = R \Rightarrow 3(1)^3 - 4(1)^2 - 5(1) + 1 = R \Rightarrow R = -5$$

- b) Sean los polinomios $P(x) = 3x^3 - x^2 - 4x - 2$ y $Q(x) = x - 2$. Sin hacer la división, halla el valor del resto, R, para $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Solución:

Por el teorema del resto se tiene que cumplir que $P(2) = R$, es decir:

$$P(2) = R \Rightarrow 3 \cdot 2^3 - 2^2 - 4 \cdot 2 - 2 = R \Rightarrow R = 10$$

- c) Determina el valor de m para que el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - mx + (m - 5)$ al dividirlo por $(x - 5)$ tenga un resto de -3

Solución:

Por el teorema del resto se tiene que cumplir que $P(5) = -3$, es decir:

$$P(5) = -3 \Rightarrow 5^3 - 2 \cdot 5^2 - 5m + (m - 5) = -3 \Rightarrow m = 15$$

- d) Calcula el valor de m y n para que el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - mx + n$ sea divisible simultáneamente por $(x - 5)$ y $(x + 2)$

Solución:

Para que el polinomio sea divisible por $(x - 5)$ y $(x + 2)$ se tienen que cumplir las condiciones $P(5) = 0$ y $P(-2) = 0$. Es decir:

$$P(5) = 5^3 - 2 \cdot 5^2 - 5m + n = 0$$

$$P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - (-2)m + n = 0$$

Tenemos entonces un sistema de ecuaciones, cuyas incógnitas son m y n. resolviendo:

$$\left. \begin{array}{l} -5m + n = -75 \\ 2m + n = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow m = 13; n = -10$$

Conclusión:

El polinomio buscado es $P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$

