

## EJERCICIOS RESUELTOS DE ECUACIONES. PARTE 1

## 1. Ecuaciones de grado 1:

$$a) \frac{3(x-4)}{2} + \frac{5(2x+1)}{3} = \frac{2x}{4}$$

Solución:

El mínimo común múltiplo es 12. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{3(x-4)}{2} + \frac{5(2x+1)}{3} &= \frac{2x}{4} \Rightarrow \frac{3(x-4) \cdot 6}{12} + \frac{5(2x+1) \cdot 4}{12} = \frac{2x \cdot 3}{12} \Rightarrow \\ \Rightarrow 18(x-4) + 20(2x+1) &= 6x \Rightarrow 18x + 40x - 6x = 72 - 20 \Rightarrow 52x = 52 \Rightarrow x = \frac{52}{52} = 1 \end{aligned}$$

$$b) \frac{2x}{1-x} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{2x \cdot 5}{(1-x) \cdot 5} = \frac{3 \cdot (1-x)}{(1-x) \cdot 5} \Rightarrow 10x = 3 - 3x \Rightarrow 10x + 3x = 3 \Rightarrow 13x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{13}$$

$$\begin{aligned} c) \frac{(x+1)(x-1)}{3} &= \frac{2x^2+1}{6} - x \Rightarrow \frac{x^2-1}{3} = \frac{2x^2+1}{6} - x \Rightarrow \frac{2x^2-2}{6} = \frac{2x^2+1}{6} - \frac{6x}{6} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cancel{2x^2} - 2 &= \cancel{2x^2} + 1 - 6x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 2. Ecuaciones cuadradas y bicuadradas:

$$a) \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{10}{3}$$

Solución:

Quitamos denominadores:

$$\Rightarrow \frac{1 \cdot 3(x+2)}{3(x+1)(x+2)} + \frac{2 \cdot 3(x+1)}{3(x+1)(x+2)} = \frac{10(x+1)(x+2)}{3(x+1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x+2) + 6(x+1) = 10(x+1)(x+2)$$

Operamos y reagrupamos términos:

$$3(x+2) + 6(x+1) = 10(x+1)(x+2) \Rightarrow 9x + 12 = 10x^2 + 3x + 2 \Rightarrow 10x^2 - 6x - 10 = 0$$

Simplificamos esta ecuación de segundo grado:

$$10x^2 - 6x - 10 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 5 = 0$$

Por último la resolvemos:

$$5x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-5)}}{2 \cdot 5} = \begin{cases} x_1 = -\frac{8}{5} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

b)  $x^4 - 3x^2 = 15$

Solución:

Ésta es una ecuación bicuadrada. Podemos manejarla como una de segundo grado haciendo el cambio  $t^2 \equiv x$ , lo que implica que:

$$x^4 - 3x^2 - 15 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 15 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2a} = \begin{cases} t_1 = \frac{3 + \sqrt{69}}{2} \\ t_2 = \frac{3 - \sqrt{69}}{2} \end{cases}$$

Ahora deshacemos el cambio:

El radicando es negativo

Por un lado,  $t_1 = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{69}}{2}}$  y por otro lado:  $t_2 = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3 - \sqrt{69}}{2}}$

Conclusión:  $x_1 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{69}}{2}}$ ;  $x_2 = -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{69}}{2}}$ ;  $x_3 \notin \mathbb{R}$ ;  $x_4 \notin \mathbb{R}$

### 3. Ecuaciones irracionales:

a)  $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = 1$

Solución:

Se aplica la siguiente idea:

Una raíz cuadrada se deshace al elevarla al cuadrado. Aislado las raíces en un miembro de la ecuación y elevando al cuadrado ambos miembros es como vamos a ir quitando los molestos radicales:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = 1 &\Rightarrow \sqrt{x} - 1 = \sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = (\sqrt{x-1})^2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1 = x - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cancel{x} - 2\sqrt{x} + 1 = \cancel{x} - 1 \Rightarrow -2\sqrt{x} = -2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 1^2 \Rightarrow \boxed{x=1} \end{aligned}$$

b)  $\sqrt{x+5} + 4 = x + 3$

Solución:

$$(\sqrt{x+5})^2 = (x-1)^2 \Rightarrow x+5 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-4)}}{2} = \begin{cases} \boxed{x_1 = 4} \\ x_2 = -1 \text{ (no verifica la ecuación)} \end{cases}$$

c)  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x+1}{2}$

Solución:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} &= \frac{x+1}{2} \Rightarrow \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 = \left( \frac{x+1}{2} \right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 &= \left( \frac{x+1}{2} \right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x + 2 + \frac{1}{x} &= \frac{x^2 + 2x + 1}{4} \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{x^2 + 2x + 1}{4} \Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = x^3 + 2x^2 + x \Rightarrow \\ \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 7x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación descomponiendo el primer miembro mediante el método de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -7 & -4 \\ -1 & & -1 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 0 \\ -1 & & -1 & 4 & \\ \hline & 1 & -4 & 0 & \end{array} \Rightarrow (x+1)^2(x-4)$$

Entonces:

$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)^2(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = -1 \text{ (no verifica la ecuación)} \\ \boxed{x = 4} \end{cases}$$

## 4. Ecuaciones de resolución mediante factorización previa

a)  $8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0$

Solución:

Descomponemos el polinomio  $8x^3 - 15x^2 + 6x + 1$  utilizando el método de Ruffini:

Las posibles raíces de este polinomio son:  $\pm 1$ . Probamos con 1.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 8 & -15 & 6 & 1 \\ 1 & & 8 & -7 & -1 \\ \hline & 8 & -7 & -1 & 0 \\ 1 & & 8 & 1 & \\ \hline & 8 & 1 & 0 & \end{array} \Rightarrow (x-1)(x-1)(8x+1)$$

Entonces:  $\Rightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-1)(8x+1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x_1 = 1} \\ \boxed{x_2 = 1} \\ x_3 = -\frac{1}{8} \text{ (no verifica la ecuación)} \end{cases}$$

b)  $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

Solución:

Descomponemos el polinomio  $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$  utilizando el método de Ruffini:

Las posibles raíces de este polinomio son:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ . Probando con  $-1, 1$  y  $2$  el polinomio se anula. Aplicamos estos valores para obtener la factorización del polinomio:

1	1	-7	-1	6	
-1	-1	0	7	-6	
1	1	0	-7	6	0
1	1	1	-6		
2	2	6			
3	3	0			

$$\Rightarrow (x+1)(x-1)(x-2)(x+3)$$

Entonces, finalmente:

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-1)(x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 1; x_3 = -2; x_4 = -3$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**Resuelve:**

- a)  $\frac{4(2x-1)}{3} - \frac{3(3x-1)}{2} = -\frac{1-x}{6}$
- b)  $\frac{1}{3} \left[ \frac{(1-3x)}{4} - \frac{3(x-2)}{2} \right] = \frac{2}{5} \left[ \frac{5(1-x)}{2} - x \right]$
- c)  $(x+1)(x-1) - 3x = 2x^2 - 1$
- d)  $\frac{2-x}{2x^2-2x+1} - \frac{1}{x-1} = 1$
- e)  $x^2(x^2-13)+36=0$
- f)  $2x^4+18=20x^2$
- g)  $x^3-2x^2-x+2=0$
- h)  $2x^3-x^2-5x-2=0$

