ECUACIONES CUADRÁTICAS Y BICUADRADAS

A. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

Las ecuaciones de grado 2 presentan la siguiente forma general:

$$ax^2+bx+c=0$$

A diferencia de una ecuación de grado 1, una ecuación de grado 2 poseen dos soluciones, es decir, hay dos valores que la satisfacen. Esas soluciones, que denotamos como x_1 y x_2 se pueden obtener de una forma muy sencilla mediante las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{array}\right\}, \text{ o lo que es lo mismo: } x=\frac{\pm b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Casos especiales

a) Caso 1: El término c es nulo.

En ese caso, en vez de resolver la ecuación aplicando (2) y (3), lo que se suele hacer es sacar factor común a x y operar convenientemente:

$$ax^2+bx=0\Rightarrow(ax+b)x=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ ax+b=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x=-\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

b) Caso 2: El término b es nulo.

En ese caso, en vez de resolver la ecuación aplicando $x=\dfrac{\pm b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ lo que se suele hacer es despejar x.

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

¡Qué no se te olvide el $\pm$!

c) Caso 3: El radicando es menor que cero.

En ese caso, la ecuación de segundo grado no tiene soluciones pertenecientes al conjunto de los números reales, que son los que tú conoces.

B. Ejercicios resueltos

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$

Solución:

Aplicamos la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, en donde a, b y c vienen dados por $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$. Así:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{3+1}{2} \\ x_2 = \frac{3-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

2. $x^2 - x - 6 = 0$

Solución:

Aplicamos la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, en donde a, b y c vienen dados por $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases}$. Así:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot (-6)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

3. $x^2 - x = 0$

Solución:

Podríamos resolver el problema usando $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, en donde

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Pero nos vamos a decantar por otra alternativa. En $x^2 - x = 0$ vamos a sacar factor común a la x:

$x^2 - x = 0 \Rightarrow (x-1)x = 0$, lo cual se puede escribir así: $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Despejando la x en ambas ecuaciones obtenemos las soluciones de la ecuación:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

4. $x^2 + \dfrac{x}{3} = 0$

Solución:

Procedemos igual que antes, sacando factor común:

$$x^2 + \frac{x}{3} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)x = 0 \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{3} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

5. $x^2 - 25 = 0$

Solución:

Podríamos resolver el problema aplicando la fórmula, con:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \ \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -25 \end{cases}$$

Pero vamos a proceder despejando la x:

$$x^2-25=0\Rightarrow x^2=25\Rightarrow x=\pm\sqrt{25}\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}x_1=5\\x_2=-5\end{cases}$$

6. $x^2-\dfrac{121}{144}=0$

Solución:

Despejamos x:

$$x^2-\frac{121}{144}=0\Rightarrow x^2=\frac{121}{144}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{121}{144}}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{11}{12}\\x=-\dfrac{11}{12}\end{cases}$$

7. $(x+3)(2x-5)=0$

Solución:

En vez de multiplicar los dos binomios y resolver la ecuación de modo usual vamos a expresarla de una forma mucho más conveniente.

$$(x+3)(2x-5)=0\Rightarrow\begin{cases}x+3=0\\2x-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+3=0\\2x-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\x-=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

8. $(x+4)^2-(2x-1)^2=8x$

Solución:

Debemos de manipular esta ecuación para que tome un aspecto parecido a $ax^2+2x+c=0$.
Vamos a tener en cuenta las identidades notables siguientes:
$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

Entonces:

$$(x+4)^2-(2x-1)^2=8x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+8x+16-\left(4x^2-4x+1\right)-8x=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+8x+16-4x^2+4x-1-8x=0\Rightarrow -3x^2-4x+15=0$$

Resolvemos ahora de modo ordinario:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ \begin{cases}a=-3\\b=-4\Rightarrow\\c=13\end{cases}$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot(-3)\cdot 15}}{2\cdot(-3)}=$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16+180}}{-6}=\frac{4\pm\sqrt{196}}{-6}=\frac{4\pm 14}{-6}==\begin{cases}x_1=-\dfrac{18}{6}=-2\\ x_2=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}\end{cases}$$

9. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{10}{3}$

Solución:

Quitamos denominadores:

$$\Rightarrow\frac{1\cdot 3(x+2)}{3(x+1)(x+2)}+\frac{2\cdot 3(x+1)}{3(x+1)(x+2)}=\frac{10(x+1)(x+2)}{3(x+1)(x+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x+2)+6(x+1)=10(x+1)(x+2)$$

Operamos y reagrupamos términos:

$$3(x+2)+6(x+1)=10(x+1)(x+2)\Rightarrow 9x+12=10x^2+3x+2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10x^2-6x-10=0$$

Simplificamos esta ecuación de segundo grado:

$$10x^2-6x-10=0\Rightarrow 5x^2-3x-5=0$$

Por último resolvemos:

$$5x^2-3x-5=0\Rightarrow x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 5(-5)}}{2\cdot 5}=\begin{cases}x_1=-\dfrac{8}{5}\\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

10. $7x^4=15-32x^2$

Solución:

Ésta es una ecuación de cuarto grado. Podemos manejarla como una de segundo grado haciendo el cambio $t^2\equiv y$, lo que implica que:

$$7x^4+32x^2-15=0\Rightarrow 7t^2+32t-15=0\Rightarrow\frac{-32\pm\sqrt{(-32)^2-4\cdot 7\cdot(-15)}}{2a}=$$

$$= \begin{cases} t_1 = \dfrac{3}{7} \\ t_2 = -5 \end{cases}$$

Ahora deshacemos el cambio:

Por un lado, $t = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ y por otro lado: $t = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$

Conclusión: $y_1 = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$; $y_2 = -\sqrt{\dfrac{3}{7}}$; $y_3 \notin \mathbb{R}$; $y_4 \notin \mathbb{R}$

11. $x^4 - 3x^2 = 15$

Solución:

Ésta es una ecuación de cuarto grado. Podemos manejarla como una de segundo grado haciendo el cambio $t^2 \equiv x$, lo que implica que:

$$x^4 - 3x^2 - 15 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 15 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2a} = \begin{cases} t_1 = \dfrac{3+\sqrt{69}}{2} \\ t_2 = \dfrac{3-\sqrt{69}}{2} \end{cases}$$

Ahora deshacemos el cambio:

$$\begin{cases} t_1 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{69}}{2}} \\ t_2 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{69}}{2}} \end{cases}$$

Conclusión:

$$x_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{69}}{2}};\quad x_2 = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{69}}{2}};\quad x_3 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{69}}{2}};\quad x_4 = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{69}}{2}}$$

***