ECUACIONES CON RADICALES

A. Introducción teórica

B. Ejercicios resueltos

A. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

Las ecuaciones con radicales son aquellas en las que una o más incógnitas están bajo un exponente integral.

El método general para resolverlas es el siguiente:

a) Aislar la incógnita elevada al exponente radical o el factor que la contiene en uno de los dos miembros.
b) Deshacer la raíz elevando los dos miembros de la ecuación a un exponente conveniente.
c) Despejar la incógnita ya sin exponentes distintos de 1.

Ejemplo:

$$2+\sqrt{x-2}=4$$

Solución:

Paso 1: Dejamos aislado al factor que contiene a la x:

$$2+\sqrt{x-2}=4 \Rightarrow 2+\sqrt{x-2}=4-2 \Rightarrow \sqrt{x-2}=2$$

Paso 2: Eliminamos la raíz elevando los dos miembros al exponente conveniente:

$$\sqrt{x-2}=2 \Rightarrow \left(\sqrt{x-2}\right)^2=2^2 \Rightarrow x-2=4 \Rightarrow x=2$$

Paso 3: Despejamos la x de forma usual:

$$x-2=4 \Rightarrow x=2$$

B. Ejercicios resueltos

1. $4\sqrt{x}-3=0$

Solución:

Dejamos aislado en un miembro el factor que contiene a la x:

$4\sqrt{x}-3=0\Rightarrow\sqrt{x}=\dfrac{3}{4}$

Elevamos los dos miembros de la ecuación a un exponente que elimine la raíz

$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\Rightarrow x=\dfrac{9}{16}$

2. $\sqrt{5-x}-2=0$

Solución:

Dejamos aislado en un miembro el factor que contiene a la x:

$\sqrt{5-x}-2=0\Rightarrow\sqrt{5-x}=2$

Elevamos los dos miembros de la ecuación a un exponente que elimine la raíz:

$\sqrt{5-x}=2\Rightarrow\left(\sqrt{5-x}\right)^2=2^2\Rightarrow 5-x=4$

Despejamos x de la forma usual:

$5-x=4\Rightarrow x=1$

3. $\sqrt{x}=5\sqrt{3}$

Solución:

Elevamos los dos miembros de la ecuación a un exponente que elimine la raíz y despejamos x:

$\sqrt{x}=5\sqrt{3}\Rightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(5\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow x=25\cdot 3\Rightarrow x=75$

4. $\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+7}=0$

Solución:

Eliminamos las raíces:

$$\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+7}=0 \Rightarrow \left(\sqrt{3x+2}\right)^2=\left(\sqrt{2x+7}\right)^2 \Rightarrow 3x+2=2x+7$$

Resolvemos la ecuación de grado uno de forma usual:

$$3x+2=2x+7 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

5. $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=1$

Solución:

Esta ecuación es más complicada que las anteriores. Pero al final se podrá asimilar a ellas.

Lo primero que haremos será intentar eliminar alguno de los factores que están bajo una raíz cuadrada:

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=1 \Rightarrow \sqrt{x}=1+\sqrt{x-1} \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2 \Rightarrow$$
$$x=1^2+2\sqrt{x-1}+\left(\sqrt{x-1}\right)^2 \Rightarrow x=1+x-1+2\sqrt{x-1} \Rightarrow 2\sqrt{x-1}=0$$

La ecuación obtenida es fácil de resolver:

$$2\sqrt{x-1}=0 \Rightarrow \sqrt{x-1}=0 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

6. $2(a-2)^{\frac{2}{3}}=50$

Solución:

Dejamos aislado en un miembro el factor que contiene a la incógnita, en este caso *a*:

$$2(a-2)^{\frac{2}{3}}=50 \Rightarrow (a-2)^{\frac{2}{3}}=\frac{50}{2} \Rightarrow (a-2)^{\frac{2}{3}}=25$$

Elevamos los dos miembros de la ecuación a un exponente que elimine la raíz:

$$\left[(a-2)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}=\left(5^2\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow a-2=5^3$$

Despejamos la incógnita *a* de la forma usual:

$$a-2=5^3 \Rightarrow a=77$$

7. $\sqrt{x-3}+5=x$

<u>Solución:</u>

Dejamos aislado en un miembro el factor que contiene a la incógnita:

$$\sqrt{x-3}+5=x \Rightarrow \sqrt{x-3}=x-5$$

Elevamos los dos miembros de la ecuación a un exponente que elimine la raíz:

$$\sqrt{x-3}=x-5 \Rightarrow \left(\sqrt{x-3}\right)^2=(x-5)^2 \Rightarrow x-3=x^2-10x+25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-11x+28=0$$

Despejamos la incógnita *x* resolviendo esta ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{11\pm\sqrt{11^2-4\cdot 28}}{2}=\frac{11\pm\sqrt{9}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=7\\x_2=4\end{cases}$$

8. $\sqrt{2x+1}-\sqrt[4]{3x+4}=0$

<u>Solución:</u>

Mediante el menor número de pasos hay que eliminar las raíces. Eso se consigue haciendo lo siguiente:

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt[4]{3x+4}=0 \Rightarrow \sqrt{2x+1}=\sqrt[4]{3x+4} \Rightarrow \left(\sqrt{2x+1}\right)^4=\left(\sqrt[4]{3x+4}\right)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x+1)^2=3x+4$$

Hemos llegado a una ecuación de segundo grado que resolvemos de forma usual:

$$(2x+1)^2=3x+4 \Rightarrow (2x)^2+4x+1=3x+4 \Rightarrow 4x^2+x-3=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 4\cdot(-3)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x_1=3}\\x_2=-4\end{cases}$$

No verifica la ecuación. No es solución.

9. $\sqrt{x}-\sqrt{x-4}=2$

<u>Solución:</u>

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(2+\sqrt{x-4}\right)^2 \Rightarrow x=4+4\sqrt{x-4}+x-4 \Rightarrow \left(\sqrt{x-4}\right)^2=0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=4}$$

10. $\sqrt{x+5}+4=x+3$

Solución:

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2=(x-1)^2 \Rightarrow x+5=x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot(-4)}}{2}=\begin{cases}\boxed{x_1=4}\\ x_2=-1\end{cases}$$ No verifica la ecuación. No es solución.

11. Resuelve: $\sqrt[3]{3x^2-2}=2x-1$

Solución:

$$\sqrt[3]{3x^2-2}=2x-1 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{3x^2-2}\right)^3=(2x-1)^3 \Rightarrow 3x^2-2=(2x-1)(2x-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2-2=(2x-1)\left(4x^2-4x+1\right) \Rightarrow 3x^2-2=8x^3-12x^2+6x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x^3-15x^2+6x+1=0$$

Descomponemos el polinomio $8x^3-15x^2+6x+1$ utilizando el método de Ruffini:

Las posibles raíces de este polinomio son: ± 1. Probamos con 1.

	8	−15	6	1
1		8	−7	−1
	8	−7	−1	0
1		8	1	
	8	1	0	

$\Rightarrow (x-1)(x-1)(8x+1)$

Entonces:

$$8x^3-15x^2+6x+1=0 \Rightarrow (x-1)(x-1)(8x+1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\boxed{\begin{array}{l}x_1=1\\ x_2=1\end{array}}\\ x_3=-\dfrac{1}{8}\ \text{(no verifica la ecuación)}\end{cases}$$

12. Resuelve: $-\dfrac{x+1}{2}+\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$

Solución:

$$-\frac{x+1}{2}+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=0\Rightarrow\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2+2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2+\frac{1}{x}=\frac{x^2+2x+1}{4}\Rightarrow\frac{x^2+2x+1}{x}=\frac{x^2+2x+1}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2+8x+4=x^3+2x^2+x\Rightarrow x^3-2x^2-7x-4=0$$

Una vez más resolvemos la ecuación acudiendo al método de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -7 & -4 \\
-1 & & -1 & 3 & 4 \\
\hline
 & 1 & -3 & -4 & 0 \\
-1 & & -1 & 4 & \\
\hline
 & 1 & -4 & 0 &
\end{array}\Rightarrow(x+1)^2(x-4)$$

Entonces:

$$\Rightarrow x^3-2x^2-7x-4=0\Rightarrow(x+1)^2(x-4)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2=-1 \text{ (no verifica la ecuación)}\\ \boxed{x=4}\end{cases}$$

13. Resuelve: $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=34$

Solución:

- Los valores de x están restringidos a aquellos que verifican: $x^2-1\geq 0$, esto es: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
- Teniendo en cuenta esa limitación, resolvemos la ecuación:

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=34\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}+\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\frac{34\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1+x^2-2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1=34\left[x^2-\left(x^2-1\right)\right]$$

$$\Rightarrow 4x^2-2=34\Rightarrow 4x^2=36\Rightarrow x^2=9\Rightarrow\begin{cases}x_1=3\\x_2=-3\end{cases}.$$

Estas dos soluciones son válidas.

***