COMBINATORIA

A. Introducción teórica

B. Ejercicios resueltos

A. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

A.1 Variaciones:

Las variaciones son agrupaciones ordenadas de objetos de un conjunto. Importa el orden y no se cogen todos los elementos del conjunto inicial.

a) Variaciones sin repetición:

$$V_{m,n} = \underbrace{m(m-1)(m-2)\cdots}_{\text{n elementos}} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

b) Variaciones con repetición: $VR_{m,n} = m^n$

A.2 Permutaciones

Las permutaciones son las distintas formas en que se pueden ordenar los *n* elementos de un conjunto. Importa el orden y, a diferencia de las variaciones, se cogen todos los elementos del conjunto inicial.

a) Permutaciones sin repetición:

$$P_m = V_{m,m} = m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = m!$$

b) Permutaciones con repetición:

$$P_m^{r,s,t\ldots} = \frac{m!}{r!\cdot s!\cdot t!\cdot\ldots.}$$

A.3 Combinaciones

Las combinaciones son agrupaciones de objetos en las que no importa su orden:

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$$

A.4 Propiedades de los números combinatorios:

i. $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$

ii. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

iii. $\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$

A.5 El desarrollo del binomio de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots +$$

$$+\binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

B. EJERCICOS RESUELTOS

B.1. Halla el valor de cada expresión:

1. $V_{6,2}$

Solución:

Hay que recordar que:

$$V_{m,n} = \underbrace{m(m-1)(m-2)\cdots}_{\text{n elementos}} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Entonces:

$V_{6,2}=6\cdot(6-1)=30$, o también así: $V_{6,2}=\dfrac{6!}{(6-2)!}=\dfrac{6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2}}{\cancel{4\cdot 3\cdot 2}}=30$

2. $VR_{6,2}$

Solución:

Hay que recordar que $VR_{m,n}=m^n$

Entonces:

$VR_{6,2}=6^2=36$

3. P_4

Solución:

Hay que recordar que $P_n=n!$. Entonces: $P_4=4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$

4. $C_{6,2}$

Solución:

Hay que recordar que $C_{m,n}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}=\dfrac{m!}{n!(m-n)!}=\dfrac{V_{m,n}}{P_n}$.

Entonces:

$C_{6,2}=\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}=\dfrac{6!}{2!(6-2)!}=\dfrac{6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 1\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=15$ o también

$C_{6,2}=\dfrac{V_{6,2}}{P_2}=\dfrac{6\cdot 5}{2!}=15$

5. $V_{5,2}-C_{5,3}$

Solución:

$V_{5,2}-C_{5,3}=5\cdot(5-1)-\dfrac{5!}{3!(5-3)!}=5\cdot 4-\dfrac{5\cdot 2\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}}=10$

6. $\dfrac{C_{4,2}}{VR_{6,2}}$ Solución: $\dfrac{C_{4,2}}{VR_{6,2}}=\dfrac{\dfrac{4!}{2!(4-2)!}}{6^2}=\dfrac{\dfrac{\cancel{4}\cdot \cancel{3\cdot 2}}{\cancel{4}}}{6\cdot \cancel{6}}=\dfrac{1}{6}$

7. $\dfrac{V_{4,2}}{P_4}$ Solución: $\dfrac{V_{4,2}}{P_4} = \dfrac{\cancel{4}\cdot\cancel{3}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot 2} = \dfrac{1}{2}$

B.2. Halla el valor de x:

8. $VR_{x,2} - V_{x,2} = 8$

Solución:

$x^2 - x(x-1) = 8 \Rightarrow x^2 - x^2 + x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 8}$

9. $\binom{11}{3} + \binom{11}{x} = \binom{12}{3}$

Solución:

Hay que recordar la propiedad $\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \binom{m}{n}$.

Entonces, directamente:

$\binom{11}{3} + \binom{11}{x} = \binom{12}{3} \Rightarrow x = 3 - 1 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

10. $\binom{39}{5+2x} = \binom{39}{2x-2}$

Solución:

Hay que recordar la propiedad $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$.

Entonces, el siguiente sistema nos da la solución:

$$\left.\begin{array}{l} m = 39 \\ 5 + 2x = n \\ 2x - 2 = m - n \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x = 9}$$

11. $\dfrac{12(x-2)!}{x!} = 1$

Solución:

$$\frac{12\cancel{(x-2)!}}{x(x-1)\cancel{(x-2)!}}=1\Rightarrow x^2-x-12=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=4\\x_2=-3\end{cases}$$

B.3. Desarrolla los siguientes productos mediante el binomio de Newton

12. $(x+y)^2=$

$$=\binom{2}{0}x^2y^0+\binom{2}{1}x^1y^1+\binom{2}{2}x^0y^2=$$

$$=\frac{2!}{0!\cdot(2-0)!}\cdot x^2+\frac{2!}{1!\cdot(2-1)!}\cdot xy+\frac{2!}{0!\cdot(2-0)!}\cdot y^2=x^2+2\cdot xy+y^2$$

13. $(x-y)^3=$

$$=[x+(-y)]^3=\binom{3}{0}x^3(-y)^0+\binom{3}{1}x^2(-y)^1+\binom{3}{2}x^1(-y)^2+\binom{3}{3}x^0(-y)^3=$$

$$=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

14. $\left(x+\sqrt{2}\right)^4=$

$$=\binom{4}{0}x^4\left(\sqrt{2}\right)^0+\binom{4}{1}x^3\left(\sqrt{2}\right)^1+\binom{4}{2}x^2\left(\sqrt{2}\right)^2+\binom{4}{3}x\left(\sqrt{2}\right)^3+\binom{4}{4}x^0\left(\sqrt{2}\right)^4=$$

$$=x^4+4\cdot\sqrt{2}\cdot x^3+\frac{2\cdot4\cdot3}{2\cdot2}x^2+2\cdot4\cdot\sqrt{2}\cdot x+4=$$

$$=x^4+4\cdot\sqrt{2}\cdot x^3+6x^2+8\cdot\sqrt{2}\cdot x+4$$

15. $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{a}\right)^5=$

$$=\left[\frac{a}{2}+\left(-\frac{b}{a}\right)\right]^5=\binom{5}{0}\left(\frac{a}{2}\right)^5\left(-\frac{b}{a}\right)^0+\binom{5}{1}\left(\frac{a}{2}\right)^4\left(-\frac{b}{a}\right)^1+\binom{5}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^3\left(-\frac{b}{a}\right)^2+$$

$$+\binom{5}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(-\frac{b}{a}\right)^3+\binom{5}{4}\frac{a}{2}\left(-\frac{b}{a}\right)^4+\binom{5}{5}\left(\frac{a}{2}\right)^0\left(-\frac{b}{a}\right)^5=$$

$$=\left(\frac{a}{2}\right)^5-5\cdot\frac{a^3\cdot b}{2^4}+\frac{5!}{2\cdot(5-2)!}\cdot\frac{ab^2}{2^3}+\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}\cdot\frac{b^3}{4a}+\frac{5!}{4!\cdot(5-4)!}\cdot\frac{b^4}{2a^3}-\left(\frac{b}{a}\right)^5=$$

$$=\left(\frac{a}{2}\right)^5-\frac{5}{16}a^3b+\frac{5}{4}ab^2+\frac{5}{2}\cdot\frac{b^3}{a}+\frac{5}{2}\cdot\frac{b^4}{a^3}-\left(\frac{b}{a}\right)^5$$

B.4. Problemas

16. ¿Cuántos son los resultados posibles de dos equipos que se enfrentan en 5 partidos?

Solución:

- Los resultados posibles son 1, X, 2. Es decir, tenemos 3 elementos con los que hay que hacer las diferentes agrupaciones. El orden importa, ya que, por ejemplo, el resultado 1,1,1,X,1 es diferente que 1,1,X,1,1. Eso quiere decir que no son combinaciones. Por otro lado, no intervienen todos los elementos del conjunto. Entonces tenemos variaciones. Como se pueden repetir los elementos, tenemos variaciones con repetición.
- Conclusión:

  $VR_{3,5}=3^5=243$.

17. ¿De cuántas formas distintas se puede formar el pódium de la final de los 100 m lisos en la que corren 8 atletas?

Solución:

- El orden importa. Luego no son combinaciones. Por otro lado, del conjunto inicial no se toman todos los elementos. Así que hablamos de variaciones. Tenemos 8 elementos (que son los atletas) tomados de tres en tres (los cajones del pódium). No son posibles las repeticiones. Luego se trata de variaciones sin repetición.

- Entonces:

  $V_{8,3}=8(8-1)(8-2)=8\cdot7\cdot6=336$

18. En una prueba de atletismo en la que participan 8 atletas se pueden clasificar sólo 3 para la final. ¿Cuantos grupos distintos de finalistas se pueden formar?

Solución:

- El orden no importa. Luego son combinaciones. Los elementos no se pueden repetir. Entonces tenemos combinaciones sin repetición, de 8 elementos tomados de 3 en tres:

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{5!}} = 56$$

19. a) ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar las letras de la palabra JUAN? b) ¿Cuántas ordenaciones distintas empezarán por vocal?

Solución:

a) Tenemos 4 elementos y nos piden de cuántas formas podemos ordenarlos. No hay repetición de elementos, el orden si importa y en la ordenación están todos los elementos. Se trata, por lo tanto, de permutaciones de 4 elementos (o dicho de otro modo: variaciones sin repetición de 4 elementos tomados de 4 en 4):

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

b) Para U _ _ _ , las ordenaciones son $P_3 = 3! = 6$ y para A _ _ _ las ordenaciones son $P_3 = 3! = 6$. Entonces las ordenaciones que empiezan por vocal son las suma de las dos, es decir, 12.

20. ¿Cuántos números distintos se pueden formar con los dígitos 3224531?

Solución:

- El orden influye, luego no son combinaciones. En los grupos que se forman están todos los elementos. Así que tenemos permutaciones. Y como hay dígitos repetidos, las permutaciones son con repetición.

- Entonces:

$$P_7^{2,2,1,1,1} = \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 1260$$

21. ¿Cuántas combinaciones se pueden hacer con dos elementos tomados del conjunto $C = \{a, b, c, d, e, f\}$? Escribe las combinaciones posibles.

Solución:

Tenemos que hallar el número de combinaciones del conjunto de seis elementos tomados de dos en dos:

$$C_{6,2}=\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!(6-2)!}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=\frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2}\cdot 1}{2\cdot 1\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2}\cdot 1}=15$$

Esas 15 combinaciones son las siguientes:

ab, ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf, cd, ce, cf, de, df, ef.

22. a) ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con la palabra MATEMATICAS?
b) ¿Cuántas empezarán por la letra M?
c) ¿Cuántas empezarán por la letra A?
d) ¿Cuántas empezarán y terminarán simultáneamente por la letra A?
e) ¿Cuántas tendrán las tres letras A juntas?

Solución:

a) No consideraremos las tildes. Tenemos entonces tres letras A, dos letras M, dos letras T, una E, una C, una S y una I. Las repeticiones son posibles. Así que :

$$P_{11}^{3,2,2,1,1,1,1}=\frac{11!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot \cancel{2!\cdot 2!}}=1663200$$

b) Fijamos una M y buscamos las permutaciones que forman las restantes 10 palabras, teniendo en cuenta que habrá tres letras A y dos T (permutaciones con repetición). Entonces:

$$P_{10}^{3,2,1,1,1,1,1}=\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2!}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2!\cdot 2!}}=151200$$

c) Fijamos una A y buscamos las permutaciones que forman las restantes 10 palabras, teniendo en cuenta que habrá dos letras A, dos M y dos T (permutaciones con repetición). Entonces:

$$P_{10}^{2,2,2,1,1,1,1}=\frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\cdot \cancel{2!\cdot 2!}}=453600$$

d) Fijamos dos letras A y buscamos las permutaciones que forman las restantes 10 palabras, teniendo en cuenta que habrá dos M y dos T (permutaciones con repetición). Entonces:

$$P_9^{2,2,1,1,1,1,1} = \frac{9!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot 2}{\cdot \cancel{2!\cdot 2!}} = 97020$$

e) Las tres letras A pueden configurarse de nueve formas distintas: Las tres al principio, las tres precedidas por otra letra, las tres precedidas por dos letras… y así hasta el caso en el que las tres están precedidas por las ocho restantes letras. En total 9 formas distintas.

Para cada uno de los casos en los que las tres letras aparecen juntas, las permutaciones vienen dadas por:

$$P_8^{2,2,1,1,1,1} = \frac{8!}{2!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot 2}{\cdot \cancel{2!\cdot 2!}} = 10080\,.$$

Como esto se da nueve veces, entonces, la respuesta que nos piden es $9\cdot P_8^{2,2,1,1,1,1} = 90720$

f) buscamos las permutaciones que forman las restantes 10 palabras, teniendo en cuenta que habrá dos M y dos T (permutaciones con repetición). Entonces:

$$P_9^{2,2,1,1,1,1,1} = \frac{9!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot 2}{\cdot \cancel{2!\cdot 2!}} = 97020$$

23. Calcula el número de boletos de Lotería Primitiva que es necesario rellenar para que te toque el primer premio con toda probabilidad (Hay que acertar 6 números de un total de 49).

Solución:

Hay que calcular el número de grupos diferentes de 6 números de entre 49 diferentes. En otras palabras, tenemos que calcular las combinaciones de 49 elementos tomados de 6:

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13983816$$